DOKUMEN NEGARA
SANGAT RAHASIA

Matematika SMA/MA IPA

PEMBAHASAN
UJIAN NASIONAL

TAHUN PELAJARAN 2012/2013

Paket Soal 2

SMA/MA

PROGRAM STUDI
IPA

MATEMATIKA

Rabu, 17 April 2013 (07.30 – 09.30)

Oleh:

Pak Anang

http://pak-anang.blogspot.com

PUSPENDIK
BALITBANG

BSNP
Badan Standar Nasional Pendidikan

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

Nama : Pak Anang

No Peserta : http://pak-anang.blogspot.com

LOGIKA PRAKTIS:
Silogisme:
$p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow r$
$\therefore p \Rightarrow r$

Modus tollens:
$p \Rightarrow q$
$\sim q$
$\therefore \sim p$

1. Diketahui premis-premis berikut:
Premis 1: Jika harga BBM naik maka harga sembako naik.
Premis 2: Jika harga sembako naik maka tarif tol naik.
Premis 3: Tarif tol tidak naik.

Kesimpulan yang sah dari ketiga premis diatas adalah ...

A. Jika harga BBM naik maka tarif tol naik.
B. Jika harga sembako naik maka tarif tol naik.
C. Harga BBM naik.
D. Harga BBM tidak naik.
E. Harga sembako tidak naik.

Karena premis ke-3 merupakan pernyataan tunggal, kesimpulannya juga pernyataan tunggal. Coret kesimpulan "jika maka", Jawaban A, B salah! Sembako ada di premis 1 dan 2, maka sembako tidak mungkin muncul di jawaban! Jawaban E juga salah! ☺

TRIK SUPERKILAT: (Penarikan Kesimpulan)
BBM naik ⇒ Sembako naik
Sembako naik ⇒ Tarif tol naik
Tarif tol ~ naik

BBM naik ⇒ Tarif tol naik
Tarif tol ~ naik
∴ BBM ~ naik

Jadi, kesimpulannya adalah BBM tidak naik

2. Pernyataan yang setara dengan pernyataan "Ani tidak mengikuti pelajaran matematika atau Ani mendapat tugas menyelesaikan soal-soal matematika." adalah ...

A. Jika Ani mengikuti pelajaran matematika maka Ani mendapat tugas menyelesaikan soal-soal matematika.
B. Jika Ani tidak mengikuti pelajaran matematika maka Ani mendapat tugas menyelesaikan soal-soal matematika.
C. Jika Ani tidak mengikuti pelajaran matematika maka Ani tidak mendapat tugas tidak menyesaikan soal-soal matematika.
D. Ani tidak mengikuti pelajaran matematika dan Ani mendapat tugas menyelesaikan soal-soal matematika.
E. Ani tidak mengikuti pelajaran matematika dan Ani tidak mendapat tugas menyelesaikan soal-soal matematika.

LOGIKA PRAKTIS:
Ingat disjungsi bisa diubah menjadi implikasi!
$p \vee q \equiv \sim p \Rightarrow q$
Coret jawaban yang bukan pernyataan majemuk implikasi (operator logikanya bukan ⇒), berarti jawaban D, E pasti salah! Pernyataan yang pertama harus dinegasikan, pernyataan yang kedua tetap. Operator logika diganti menjadi "jika maka", berarti jawaban A, C pasti salah! ☺

TRIK SUPERKILAT: (Pernyataan Senilai Implikasi) ~ pelajaran ∨ tugas ≡ pelajaran ⇒ tugas

3. Bentuk sederhana dari $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = ...$

A. $\dfrac{12+4\sqrt{15}}{3}$
B. $\dfrac{15+4\sqrt{15}}{3}$
C. $\dfrac{27+7\sqrt{15}}{3}$
D. $\dfrac{29+9\sqrt{15}}{3}$
E. $\dfrac{33+11\sqrt{15}}{3}$

LOGIKA PRAKTIS:
Perhatikan yang saya tandai dengan tanda kotak, dan perhatikan penyebut pada semua jawaban adalah sama yg dengan mudah diperoleh dari $(4\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{5})^2 = 48 - 45 = 3$ maka soal ini hanya menuntut kita mencari nilai bilangan bulatnya saja dari perkalian pembilang dengan sekawan akar, jadi untuk efisiensi waktu tidak perlu dikalikan semuanya, cukup yang bentuk akarnya sama saja antara pembilang dengan sekawan akar. Perhatikan langkah pengerjaan pada catatan Logika Praktis di samping! ☺

Cara Biasa: (Rasionalisasi Bentuk Akar)

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}} \times \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{4\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})+\sqrt{5}(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{4\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$
$$= \frac{12+3\sqrt{15}+4\sqrt{15}+15}{48-45}$$
$$= \frac{27+7\sqrt{15}}{3}$$

Catatan LOGIKA PRAKTIS:
Kita hanya mengecek hasil perkalian dari yang bertanda panah di bawah ini saja, kita sesuaikan dengan hasil pada pilihan jawaban A, B, C, D, E yang saya beri tanda kotak merah!

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}} \times \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{4\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3} + \sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}$$
$$= 12 + 15$$
$$= 27$$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

LOGIKA PRAKTIS:

Faktorkan numerus ke atas, faktorkan basis ke bawah.

Lihat apa yg diketahui pada soal:

$\left.\begin{array}{l} {}^3\log 5 = a \\ {}^3\log 2 = \frac{1}{b} \\ {}^3\log 3 = 1 \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l} 5 \text{ ganti dengan } a \\ 2 \text{ ganti dengan } \frac{1}{b} \\ 3 \text{ ganti dengan } 1 \end{array}\right.$

Ganti perkalian menjadi penjumlahan.

$${}^6\log 10 = \frac{\frac{1}{b} + a}{\frac{1}{b} + 1}$$

$2 \cdot 5$ $2 \cdot 3$

☺

4. Diketahui ${}^3\log 5 = a$ dan ${}^2\log 3 = b$. Nilai ${}^6\log 10$ adalah ....

A. $\frac{ab+1}{ab}$

B. $\frac{a+1}{b+1}$

C. $\frac{b+1}{a+1}$

~~D.~~ $\frac{ab+1}{b+1}$

E. $\frac{b+1}{ab+1}$

Cara Biasa:

$$\begin{aligned} {}^6\log 10 &= \frac{{}^3\log 10}{{}^3\log 6} \\ &= \frac{{}^3\log(2\times 5)}{{}^3\log(2\times 3)} \\ &= \boxed{\frac{{}^3\log 2 + {}^3\log 5}{{}^3\log 2 + {}^3\log 3}} \\ &= \frac{\frac{1}{b} + a}{\frac{1}{b} + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{b} + a}{\frac{1}{b} + 1} \times \frac{b}{b} \\ &= \frac{1 + ab}{1 + b} \end{aligned}$$

TRIK SUPERKILAT: (Logaritma)

Lihat bentuk logaritma. Cari angka yang sama, yaitu 3. Paksakan angka 3 tersebut menjadi basis logaritma. Lalu gunakan juga ${}^3\log 3 = 1$ sehingga akan diperoleh:

$${}^2\log 3 = b \Rightarrow \left.\begin{array}{l} {}^3\log 5 = a \\ {}^3\log 2 = \frac{1}{b} \\ {}^3\log 3 = 1 \end{array}\right\} \text{cara membacanya} \left\{\begin{array}{l} \text{bertemu 5 tulis } a \\ \text{bertemu 2 tulis } \frac{1}{b} \\ \text{bertemu 3 tulis } 1 \end{array}\right.$$

TRIK SUPERKILAT sebenarnya hanya meringkas pola langkah pengerjaan cara biasa pada kotak berwarna biru di samping. Jadi,

$${}^6\log 10 \xrightarrow{\text{jadikan pecahan numerus, di atas basis, di bawah}} \frac{10}{6} \xrightarrow{\text{faktorkan 10 dan 6 sehingga muncul angka warna biru (5, 2, 3) di atas}} \frac{2\times 5}{2\times 3} \xrightarrow{\text{ubah angka sesuai aturan di atas dan ubah tanda kali menjadi tanda tambah}} \frac{\frac{1}{b} + a}{\frac{1}{b} + 1}$$

LOGIKA PRAKTIS:

Misal Persamaan Kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki akar-akar yaitu α dan β.

Apabila $\alpha = n\beta$, maka berlaku $nb^2 = (n+1)^2 ac$

☺

5. Akar-akar persamaan $x^2 + (a-1)x + 2 = 0$ adalah α dan β. Jika $\alpha = 2\beta$ dan $a > 0$ maka nilai a = ...

A. 2

B. 3

~~C.~~ 4

D. 6

E. 8

TRIK SUPERKILAT: (Persamaan Kuadrat (PK))

PK: $x^2 + (a-1)x + 2 = 0$

$\Rightarrow a = 1; b = (a-1); c = 2$

Sifat perbandingan akar-akar PK adalah $\alpha = 2\beta \Rightarrow n = 2$

$$\begin{aligned} nb^2 &= (n+1)^2 ac \\ \Leftrightarrow \cancel{2}(a-1)^2 &= (3)^2(1)(\cancel{2}) \\ \Leftrightarrow (a-1)^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow (a-1) &= \pm 3 \end{aligned}$$

Sehingga,

$a = 1 + 3 = 4$ atau $\cancel{a = 1 - 3 = -2}$ Tidak memenuhi

Jadi, karena $a > 0$, maka nilai $a = 4$

LOGIKA PRAKTIS:

Definit positif terjadi apabila nilai $f(x)$ selalu positif

Artinya, grafik $f(x)$ selalu hadap ke atas, syarat $a > 0$.

Gafik $f(x)$ tidak berpotongan dengan sb X, syaratnya $D < 0$.

☺

6. Fungsi $f(x) = 2x^2 - ax + 2$ akan menjadi fungsi definit positif bila nilai a berada pada interval ....

A. $a > -4$

B. $a > 4$

~~C.~~ $-4 < a < 4$

D. $4 < a < 6$

E. $-6 < a < 4$

Cara Biasa: (Fungsi Kuadrat (FK))

Syarat FK definit positif:

- $A > 0 \Rightarrow 2 > 0$ (sudah terpenuhi)
- $D < 0 \Rightarrow$ $b^2 - 4ac < 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (-a)^2 - 4(2)(2) < 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 16 < 0 \end{aligned}$$

Pembuat nol

$\Leftrightarrow$ $a = -4$ atau $a = 4$

Nilai a yang memenuhi pertidaksamaan tersebut bisa dilihat pada garis bilangan:

Jadi nilai m yang memenuhi adalah $-4 < a < 4$

LOGIKA PRAKTIS:

Cara mengingat sifat-sifat diskriminan PK adalah melihat bentuk $\sqrt{D}$ pada rumus ABC:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

- Akar-akar PK real apabila $D \geq 0$,
  - ✓ $D > 0$, akar real berbeda.
  - ✓ $D = 0$, akar real kembar.
- Akar-akar PK imajiner apabila $D < 0$, karena nilai akar bilangan negatif adalah bilangan imajiner.

☺

7. Diketahui persamaan kuadrat $mx^2 - (2m-3)x + (m-1) = 0$. Nilai m yang menyebabkan akar-akar persamaan kuadrat tersebut real dan berbeda adalah ....

A. $m > \frac{13}{12}, m \neq 0$

~~B.~~ $m < \frac{9}{8}, m \neq 0$

C. $m > \frac{9}{8}, m \neq 0$

D. $m < \frac{9}{4}, m \neq 0$

E. $m > \frac{9}{4}, m \neq 0$

Cara Biasa: (Diskriminan Persamaan Kuadrat (PK))

PK: $mx^2 - (2m-3)x + (m-1) = 0$

$\Rightarrow a = m; b = -(2m-3); c = (m-1)$

Syarat disebut PK apabila $a \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$

Syarat akar-akar PK real dan berbeda:

$$\begin{aligned} D > 0 \Rightarrow \quad & b^2 - 4ac > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(-(2m-3)\right)^2 - 4(m)(m-1) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 4m > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -8m + 9 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -8m > -9 \\ \Leftrightarrow \quad & m < \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Jadi nilai m yang menyebabkan akar-akar PK tersebut real dan berbeda adalah $m < \frac{9}{8}; m \neq 0$

LOGIKA PRAKTIS:

Gunakan metode substitusi untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan mensubstitusikan variabel yang tidak ditanyakan pada soal dengan variabel yang ditanyakan pada soal.

☺

8. Lima tahun yang akan datang, jumlah umur kakak dan adik adalah 6 kali selisihnya. Sekarang, umur kakak 6 tahun lebih dari umur adik. Umur kakak sekarang adalah ....

A. 21 tahun

~~B.~~ 16 tahun

C. 15 tahun

D. 10 tahun

E. 6 tahun

Cara Biasa: (Sistem Persamaan Linear)

x = umur kakak

y = umur adik

Umur kakak 5 tahun yang akan datang, ditambah umur adik 5 tahun yang akan datang sama dengan 6 kalinya selisih umur kakak dan umur adik, dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} (x+5) + (y+5) &= 6(x-y) \\ \Leftrightarrow \quad x + y + 10 &= 6x - 6y \\ \Leftrightarrow \quad -5x + 7y &= -10 \end{aligned}$$

Umur kakak sama dengan umur adik ditambah 6 tahun, dituliskan menjadi:

$x = y + 6 \Rightarrow y = x - 6$

Substitusi $y = x - 6$ ke $-5x + 7y = -10$:

$$\begin{aligned} -5x + 7y &= -10 \\ \Leftrightarrow -5x + 7(x-6) &= -10 \\ \Leftrightarrow -5x + 7x - 42 &= -10 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= 32 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 16 \end{aligned}$$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

LOGIKA PRAKTIS:
Perhatikan!
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$
Dari pembentukan persamaan lingkaran, maka kita pasti bisa menentukan koefisien x negatif, dan pastinya koefisien y positif.
☺

9. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik (4, –3) dan berdiameter $4\sqrt{17}$ adalah ....

A. $x^2+y^2-8x+6y-57=0$
B. $x^2+y^2-8x+6y-43=0$
C. $x^2+y^2-8x-6y-43=0$
D. $x^2+y^2+8x-6y-15=0$
E. $x^2+y^2+8x-6y-11=0$

Cara Biasa: (Persamaan Lingkaran)
$d=4\sqrt{17}\Rightarrow r=\frac{d}{2}=2\sqrt{17}$
Persamaan lingkaran dengan pusat (a,b) dan jari-jari r:
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$(x-4)^2+(y-(-3))^2=(2\sqrt{17})$
$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=68$
$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2+6y+9=68$
$\Leftrightarrow x^2+y^2-8x+6y+25-68=0$
$\Leftrightarrow x^2+y^2-8x+6y-43=0$

LOGIKA PRAKTIS:
Dari Teorema Vieta
$x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$
$x_1x_2x_3=-3$
Diket faktor $(2x-1)\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}$
Jadi, $x_2+x_3=1$ dan $x_2x_3=-6$
Diperoleh $x_2=-2$ dan $x_3=3$
Jadi faktor lain $(x+2)(x-3)$
☺

10. Diketahui salah satu faktor linear dari suku banyak $f(x)=2x^3-3x^2+(p-15)x+6$ adalah $(2x-1)$. Faktor linear lainnya dari suku banyak tersebut adalah ....

A. $x-5$
B. $x-2$
C. $x+1$
D. $x+2$
E. $x+3$

Cara Biasa: (Teorema Faktor)
$(2x-1)$ faktor dari $f(x)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$
$f\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2+(p-15)\left(\frac{1}{2}\right)+6=0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}p-\frac{15}{2}+6=0$
$\Leftrightarrow p=4$

Jadi $f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$

$\frac{1}{2}$	2	−3	−11	6
		1	−1	−6
	2	−2	−12	0

Sehingga diperoleh hasil bagi:
$x^2-x-6\Rightarrow(x+2)(x-3)$
Jadi, salah satu faktor $f(x)$ adalah $(x+2)$

LOGIKA PRAKTIS:
Cek nilai $(g\circ f)(x)$ dan salah satu diantara jawaban A, B, C, D, E haruslah bernilai sama ketika disubstitusi dg sebuah nilai x!
Karena konstanta semua pilihan jawaban berbeda, pilih $x=0$!
Hanya jawaban E yang benar!
☺

11. Diketahui fungsi $f(x)=x-4$ dan $g(x)=x^2-3x+7$. Fungsi komposisi $(gof)(x)=$ ....

A. x^2-3x+3
B. $x^2-3x+11$
C. $x^2-11x+15$
D. $x^2-11x+27$
E. $x^2-11x+35$

Cara Biasa: (Komposisi Fungsi)
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$=g(x-4)$
$=(x-4)^2-3(x-4)+7$
$=x^2-8x+16-3x+12+7$
$=x^2-11x+35$

TRIK SUPERKILAT:
Misal $x=0\Rightarrow f(0)=-4\Rightarrow g(-4)=35$
Kita cek pada jawaban:
A. $f(0)=0-0+3\neq 35$ (salah!)
B. $f(0)=0-0+11\neq 35$ (salah!)
C. $f(0)=0-0+15\neq 35$ (salah!)
D. $f(0)=0-0+27\neq 35$ (salah!)
E. $f(0)=0-0+35=35$ (BENAR!)

12. Diketahui fungsi $g(x)=\frac{x+3}{x-1}$, $x\neq 1$. Invers fungsi g adalah $g^{-1}(x)=$ ....

A. $\frac{x+3}{x-1}$, $x\neq 1$
B. $\frac{x+3}{x+1}$, $x\neq -1$
C. $\frac{x+1}{x-3}$, $x\neq 3$
D. $\frac{x+1}{x+3}$, $x\neq -3$
E. $\frac{x-1}{x-3}$, $x\neq 3$

LOGIKA PRAKTIS:
Perhatikan
1 pindah menjadi −1
$g(x)=\frac{1x+3}{x-1}$
Dan lihat pilihan jawaban yang memenuhi (konstanta pada penyebut adalah −1) hanya A.
☺

Cara Biasa: (Invers Fungsi)
$g(x)=\frac{x+3}{x-1}$
$y=\frac{x+3}{x-1}$
$y(x-1)=x+3$
$xy-y=x+3$
$xy-x=y+3$
$x(y-1)=y+3$
$x=\frac{y+3}{y-1}$
$\therefore g^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-1}$

TRIK SUPERKILAT:
Perhatikan letak a dan d ditukar dan dikalikan negatif (tanda berubah)
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$
$\therefore f(x)=\frac{1x+3}{x-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1x+3}{x-1}$

LOGIKA PRAKTIS:
Gunakan bantuan tabel untuk membuat model matematika dari soal.
Dan dengan menggunakan metode gradien yang telah dimodifikasi akan kita cari nilai perbandingan koefisien x dan y pada setiap fungsi kendala dan fungsi objektif.
Apabila ditanyakan max maka urutannya Y E X, lalu lihat dimanakah letak fungsi objektifnya berada, aturannya:
- Y atau X, artinya nilai objektif masing-masing terletak di sumbu Y atau X untuk fungsi di sebelahnya.
- E, artinya nilai objektif pasti merupakan titik potong antara kedua fungsi.

13. Luas daerah parkir 1.760 m^2. Luas rata-rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil besar 20 m^2. Daya tampung maksimum hanya 200 kendaraan. Biaya parkir mobil kecil Rp1.000,00/jam dan mobil besar Rp2.000,00/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang pergi dan datang, penghasilan maksimum tempat parkir adalah ....

A. Rp176.000,00
B. Rp200.000,00
C. Rp260.000,00
D. Rp300.000,00
E. Rp340.000,00

TRIK SUPERKILAT:

	Mobil kecil	Mobil besar	Jumlah	Perbandingan koefisien x dan y
Luas	~~4~~ 1	~~20~~ 5	~~≤ 1760~~ ≤ 440	1/5
Kapasitas	1	1	≤ 200	1/1
Biaya	1000	2000		1/2

Urutkan perbandingan koef x dan y dari kecil ke besar
Karena yang ditanyakan nilai maksimum, maka urutannya adalah Y E X

Y	E	X
1/5	1/2	1/1

Ternyata fungsi objektif (biaya) berada di E. Artinya titik maksimumnya berada di titik potong kedua fungsi kendala. (Gunakan metode determinan matriks)

$x=\frac{\begin{vmatrix}440 & 5\\ 200 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-560}{-4}=140$

$x+y=200\Rightarrow(140)+y=200$
$\Leftrightarrow y=60$

Jadi, nilai maksimumnya adalah:
$f(140,60)=1000(140)+2000(60)$
$=$ Rp260.000,00

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

LOGIKA PRAKTIS:
Pada soal di samping, kita hanya perlu melihat baris dan kolom manakah yang bersesuaian dg variabel-variabel yang ditanyakan. Lalu selesaikanlah operasi aljabar yang memuat variabel-variabel tersebut! ☺

14. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} 4 & x-2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ y & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$. Nilai dari $x + y = ...$

A. 3
B. 11
C. 14
D. 19
E. 25

Cara Biasa: (Matriks)

$$\begin{pmatrix} 4 & x-2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ y & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4+(-6) & x-2+8 \\ 3+y & 2+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & x+6 \\ 3+y & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$x + 6 = 20 \Rightarrow x = 20 - 6$
$\Leftrightarrow x = 14$

$3 + y = -8 \Rightarrow y = -8 - 3$
$\Leftrightarrow y = -11$

Jadi,
$x + y = 14 + (-11) = 3$

LOGIKA PRAKTIS:
$2\vec{b}$ artinya kalikan vektor $\vec{b}$ dengan bilangan 2.
Lalu selesaikanlah operasi aljabar vektor tersebut! ☺

15. Diketahui vektor $\vec{a} = 2i - j$, $\vec{b} = 2i - k$, dan $\vec{c} = 3i + j + 2k$. Hasil $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ adalah ....

BONUS
Tidak ada jawaban benar!

A. $-i + 2j - 4k$
B. $5i - 3j$
C. $i - 2j + 2k$
D. $i - 3j + 4k$
E. $i - 2j + 4k$

Cara Biasa: (Operasi Aljabar Vektor)

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ \vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

LOGIKA PRAKTIS:
Soal di samping cukup menjebak.
Perhatikan, pertanyaan pada soal adalah nilai sinus, bukan nilai cosinus!
Ingatlah pada identitas trigonometri berikut:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
atau
$\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$ ☺

16. Diketahui vektor-vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nilai sinus sudut antara vektor $\vec{u}$ dan vektor $\vec{v}$ adalah ....

A. $-\frac{1}{2}$
B. 0
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
E. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Cara Biasa: (Sudut antara dua vektor)

$$\cos\theta = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}$$

$$= \frac{1+0+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$= \pm\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \pm\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}$$
$$= \pm\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$= \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

LOGIKA PRAKTIS:
Rumus proyeksi vektor orthogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$

$$\vec{c} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\cdot\vec{b}$$

Jadi, coret dulu jawaban yang pasti salah.

Perhatikan!
Karena hasil proyeksi adalah kelipatan dari vektor $\vec{b}$, maka tanda koefisien pada jawaban A, B, C, D, E harus mirip dengan tanda koefisien pada vektor $\vec{b}$.
Perhatikan tanda koefisien vektor $\vec{b}$ adalah plus min min, maka jawaban yang benar seharusnya bertanda: plus min min atau min plus plus.
Jadi, jawaban A, C, D pasti SALAH!!!! ☺

17. Diketahui vektor $\vec{a} = -i - j + 2k$ dan $\vec{b} = i - j - 2k$ (plus min min). Proyeksi vektor orthogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah ....

A. $-\frac{1}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$
B. $-\frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$
C. $-\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{4}{3}k$
D. $-\frac{2}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{4}{3}k$
E. $-\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{4}{3}k$

Cara Biasa: (Proyeksi vektor)

$$\text{Proyeksi } \vec{a} \text{ ke } \vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}\right)^2}\cdot\vec{b}$$

$$= \left(\frac{1+1-4}{(\sqrt{6})^2}\right)\cdot\vec{b}$$

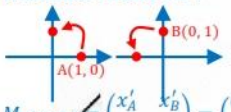
$$= -\frac{2}{6}\cdot\vec{b}$$

$$= -\frac{1}{3}(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

LOGIKA PRAKTIS: Cara menghafal matriks translasi rotasi 90°.



$M_{R(O,90°)} = \begin{pmatrix} x'_A & x'_B \\ y'_A & y'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Titik P dirotasikan lalu ditranslasikan.

$P'' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

☺

18. Titik P (–3, 1) dipetakan oleh rotasi dengan pusat O sejauh 90°, dilanjutkan dengan translasi $T = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Peta titik P adalah ....

A. P'' (2, 1)
B. P'' (0, 3)
C. P'' (2, 7)
D. P'' (4, 7)
E. P'' (4, 1)

Cara Biasa: (Transformasi)

$P\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R(O,90°)} P' = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T=\binom{3}{4}} A'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

LOGIKA PRAKTIS: Satu hal yang pasti benar haruslah $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$, karena syarat numerus logaritma yang tidak boleh nol dan negatif.
Jadi jawaban A, B, E pasti SALAH!
☺

19. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan ${}^2\log(x+2) + {}^2\log(x-2) \le {}^2\log 5$ adalah ....

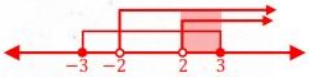
A. $\{x \mid x \ge -2\}$
B. $\{x \mid x \ge 2\}$
C. $\{x \mid x \ge 3\}$
D. $\{x \mid 2 < x \le 3\}$
E. $\{x \mid -2 < x < 2\}$

Cara Biasa: (Pertidaksamaan Logaritma)

${}^2\log(x+2) + {}^2\log(x-2) \le {}^2\log 5$
${}^2\log(x+2)(x-2) \le {}^2\log 5$
$(x+2)(x-2) \le 5$
$x^2 - 4 \le 5$
$x^2 - 9 \le 0$

$x^2 - 9 \le 0$
$(x+3)(x-3) \le 0$
Pembuat nol
$x = -3$ atau $x = 3$

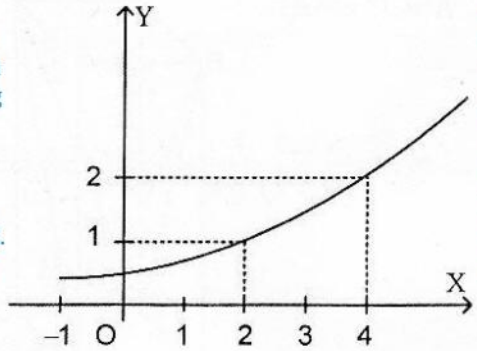
Syarat numerus logaritma:
$x + 2 > 0$ dan $x - 2 > 0$
$x > -2$ $\qquad x > 2$



Jadi HP $\{x \mid 2 < x \le 3\}$

20. Persamaan grafik fungsi seperti pada gambar berikut adalah ....

LOGIKA PRAKTIS: Karena jawaban A, B, C, D, E mirip, maka langsung cek aja menggunakan titik-titik yang dilewati oleh grafik fungsi tersebut.
Cek pada jawaban apabila disubstitusikan $x = 2$, maka $y = 1$ dan $x = 4$, maka $y = 2$.
Dan ternyata jawaban benar hanya jawaban A!



A. $y = 2^{\frac{1}{2}x-1}$
B. $y = 2^{-\frac{1}{2}x-1}$
C. $y = 2^{x-2}$
D. $y = 2^{x+2}$
E. $y = 2^{2x-1}$

Cara Biasa: (Fungsi Eksponen atau Logaritma)

Dengan melihat grafik $y = f(x)$ yang monoton naik menuju ∞, maka $y = a^x, a > 0$. Nilai a pada soal adalah 2, sehingga $y = 2^x$
Namun, karena grafik tidak melewati titik (1,0), maka dengan melihat pilihan jawaban yang tersedia, berarti $f(x)$ mengalami transformasi translasi di sumbu X, sehingga $y = 2^{ax+b}$
Perhatikan, karena $f(x)$ melewati (2, 1), maka:

$x = 2, y = 1 \Rightarrow 1 = 2^{2a+b}$
$\Leftrightarrow 2^0 = 2^{2a+b}$
$\Leftrightarrow 0 = 2a + b$
$\Leftrightarrow b = -2a$

Karena $f(x)$ melewati titik (4, 2) maka:

$x = 4, y = 2 \Rightarrow 2 = 2^{4a+b}$
$\Leftrightarrow 2^1 = 2^{4a+b}$
$\Leftrightarrow 1 = 4a + b$

Sehingga $b = -2a$ ke $1 = 4a + b$ diperoleh
$1 = 4a + b \Rightarrow 1 = 4a + (-2a)$
$\Leftrightarrow 1 = 2a$
$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Sehingga $b = -2a = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

Jadi fungsi tersebut adalah $y = 2^{\frac{1}{2}x-1}$

21. Diketahui deret aritmetika dengan suku ke-3 dan ke-6 berturut-turut adalah 30 dan 51. Jumlah 15 suku pertama barisan tersebut adalah ....

LOGIKA PRAKTIS: Ingat rumus suku ke-n barisan aritmetika adalah:
$U_n = a + (n-1)b$

Ingat juga rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah:
$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$
☺

A. 625
B. 755
C. 975
D. 1.050
E. 1.150

Cara Biasa: (Barisan dan Deret Aritmetika)

$U_3 = 30 \Rightarrow a + 2b = 30$
$U_6 = 51 \Rightarrow a + 5b = 51$ –
$-3b = -21 \Leftrightarrow b = 7$

$a + 2b = 30 \Rightarrow a + 2(7) = 30$
$\Leftrightarrow a + 14 = 30$
$\Leftrightarrow a = 16$

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$
$\Leftrightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(2(16) + 14(7))$
$= \frac{15}{2} \cdot (32 + 98)$
$= \frac{15}{2} \cdot (130)$
$= 975$

TRIK SUPERKILAT:

$b = \frac{U_p - U_q}{p - q} \Rightarrow b = \frac{U_6 - U_3}{6 - 3}$
$= \frac{51 - 30}{3}$
$= 7$

$S_n = \frac{n}{2}\left(U_p + U_q + ((n+1) - (p+q))b\right)$
$\Leftrightarrow S_{15} = \frac{15}{2}(U_3 + U_6 + 7b)$
$= \frac{15}{2}(30 + 51 + 7(7))$
$= \frac{15}{2}(130)$
$= 975$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

LOGIKA PRAKTIS: Ingat rumus suku ke-n barisan aritmetika adalah: $U_n = a \cdot r^{n-1}$
Ingat juga rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah:
$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; r > 1$
$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}; r < 1$
☺

22. Hasil produksi suatu pabrik setiap tahunnya meningkat mengikuti aturan barisan geometri. Produksi pada tahun pertama sebanyak 200 unit dan pada tahun keempat sebanyak 1.600 unit. Hasil produksi selama enam tahun adalah ....

A. 6.200 unit
B. 6.400 unit
C. 12.400 unit
D. 12.600 unit
E. 12.800 unit

Cara Biasa:
(Barisan dan Deret Geometri)

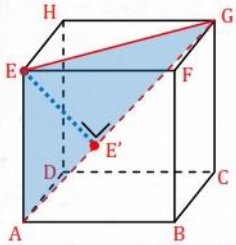
$U_1 = 200 \Rightarrow a = 200$
$U_4 = 1600 \Rightarrow a \cdot r^3 = 1600$
$\Leftrightarrow 200r^3 = 1600$
$\Leftrightarrow r^3 = 8$
$\Leftrightarrow r = 2$

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{200(2^6 - 1)}{2 - 1}$
$= 200(64 - 1)$
$= 200(63)$
$= 12.600$

LOGIKA PRAKTIS: Apabila terbentuk segitiga siku-siku, dan jarak yang dimaksud adalah garis tinggi segitiga, maka gunakan sifat luas segitiga dari dua pasang garis alas dan tinggi yang terbentuk. Lihat, pada gambar di samping, berlaku:
$L\Delta AEG = \frac{1}{2} \cdot EE' \cdot AG = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EG$
☺

23. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 6 cm. Jarak titik E ke garis AG adalah ....

A. $2\sqrt{3}$ cm
B. $3\sqrt{2}$ cm
C. $2\sqrt{6}$ cm
D. $3\sqrt{6}$ cm
E. $6\sqrt{2}$ cm



Cara Biasa: (Dimensi Tiga (Jarak))
Jarak titik E ke AG adalah EE'.
AG adalah diagonal ruang, $AG = 6\sqrt{3}$ cm
EG adalah diagonal bidang, $EG = 6\sqrt{2}$ cm
AE adalah rusuk kubus, $AE = 6$ cm
Perhatikan ΔAEG, luas ΔAEG dapat ditentukan dengan dua cara, yaitu:
$L\Delta AEG = \frac{1}{2} \cdot EE' \cdot AG = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EG$

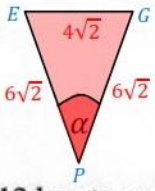
Sehingga diperoleh:
$EE' \cdot AG = AE \cdot EG$
$\Leftrightarrow EE' = \frac{AE \cdot EG}{AG}$
$= \frac{6 \cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$
$= 2\sqrt{6}$ cm

LOGIKA PRAKTIS: Perhatikan segitiga EPG, misal $\angle P = \alpha$, maka garis tinggi pada segitiga yang memotong sisi alas EG akan membagi sudut α menjadi dua sudut yang sama besar.
Sehingga diperoleh
$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$
Ingat $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$
Sehingga:
$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$
$= 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2$
$= 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$
☺

24. Nilai cosinus sudut antara bidang BDE dan bidang BDG seperti terlihat pada gambar prisma segi-4 ABCD.EFGH beraturan berikut adalah ....

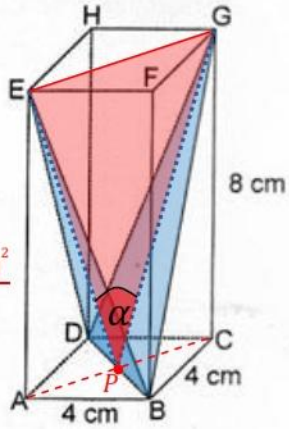
A. $\frac{2}{6}$
B. $\frac{3}{6}$
C. $\frac{4}{6}$
D. $\frac{7}{9}$
E. $\frac{8}{9}$

Cara Biasa: (Dimensi Tiga (Sudut))
Sudut antara bidang BDE dan BDG adalah sudut yang dibentuk oleh ruas garis PE dan PG.
AC = diagonal bidang $= 4\sqrt{2}$ cm
$PC = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$ cm
Perhatikan ΔEPG:
EG = diagonal bidang $= 4\sqrt{2}$ cm



$PG = \sqrt{PC^2 + CG^2}$
$= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 8^2}$
$= \sqrt{8 + 64}$
$= \sqrt{72}$
$= 6\sqrt{2}$ cm

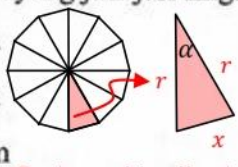
Dengan menggunakan rumus aturan cosinus diperoleh:
$\cos\alpha = \cos\angle(PE, PG)$
$= \frac{PE^2 + PG^2 - EG^2}{2 \cdot TE \cdot TF}$
$= \frac{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2}{2 \cdot (6\sqrt{2}) \cdot (6\sqrt{2})}$
$= \frac{72 + 72 - 32}{144}$
$= \frac{112}{144}$
$= \frac{7}{9}$



LOGIKA PRAKTIS: Keliling segi-12 itu sedikiiiittttt lebih kecil dari keliling lingkaran.
Keliling lingkaran berjari-jari r adalah $2\pi r$, senilai dg $6{,}28r$.
Karena $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, maka hanya $12r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ yg sedikit lebih kecil dari $6{,}28\,r$
(Bukti: $12\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 12\sqrt{0{,}3} \approx 6, \ldots$)
Jadi, jelas jawabannya C!
☺

25. Keliling segi-12 beraturan yang jari-jari lingkaran luarnya r cm adalah ....

A. $2r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm
B. $6r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm
C. $12r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm
D. $6r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ cm
E. $12r\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ cm



Catatan TRIK SUPERKILAT:
Perhatikan, pada segi-n beraturan terdapat n buah segitiga yg kongruen, sehingga keliling segi-n adalah:
$K_{segi-n} = n \cdot x$

Panjang x bisa dicari menggunakan aturan cosinus:
$x^2 = r^2 + r^2 + 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\left(\frac{360°}{n}\right) \Leftrightarrow x = r\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{360°}{n}\right)\right)}$
Jadi, rumus keliling segi-n: $K_{segi-n} = n \cdot r\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{360°}{12}\right)\right)}$

TRIK SUPERKILAT:
(Aturan Sinus dan Kosinus)
$K_{segi-12} = 12 \cdot r\sqrt{2(1 - \cos 30°)}$
$= 12r\sqrt{2\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}$
$= 12r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

LOGIKA PRAKTIS: Dengan mudah kita melihat bahwa pola pengerjaan soal di samping adalah mengubah persamaan soal menjadi persamaan kuadrat dengan $\sin x$ sebagai variabelnya.
Ingat $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
☺

26. Nilai x memenuhi persamaan $\cos 2x - \sin x = 0$ untuk $0^0 < x < 360^0$ adalah ....

A. $\{30^0, 150^0\}$
B. $\{30^0, 270^0\}$
C. $\{30^0, 150^0, 180^0\}$
D. $\{60^0, 120^0, 300^0\}$
E. $\{30^0, 150^0, 270^0\}$

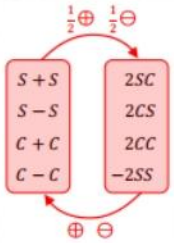
Cara Biasa: (Persamaan Trigonometri)
$\cos 2x - \sin x = 0$
$\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x) - \sin x = 0$
$\Leftrightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$
Pembuat nol
$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0$ atau $\sin x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ atau $\sin x = -1$

Jadi, nilai x memenuhi persamaan:
$\sin x = \frac{1}{2}$
- Kuadran I:
  $\sin x = \sin 30°$
- Kuadran II:
  $\sin x = \sin(180° - 30°)$
  $= \sin 150°$

$\sin x = -1$
- Kuadran II:
  $\sin x = \sin 180°$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

LOGIKA PRAKTIS:
Cara mudah mengingat dan menghafal rumus jumlah selisih sinus kosinus adalah:



☺

27. Nilai dari $\dfrac{\cos 115° + \cos 5°}{\sin 115° + \sin 5°} = ...$

A. $-\sqrt{3}$
B. -1
C. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
D. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
E. $\sqrt{3}$

Cara Biasa: (Rumus Jumlah Selisih Sinus Kosinus)

$$\frac{\cos 115° + \cos 5°}{\sin 115° + \sin 5°} = \frac{\cancel{2}\cos\frac{1}{2}(115° + 5°)\,\cancel{\cos\frac{1}{2}(115° + 5°)}}{\cancel{2}\sin\frac{1}{2}(115° + 5°)\,\cancel{\cos\frac{1}{2}(115° + 5°)}}$$
$$= \frac{\cos 60°}{\sin 60°}$$
$$= \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

LOGIKA PRAKTIS:
Penyelesaian limit tak hingga berbentuk

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$

adalah $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

☺

28. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left((2x-1) - \sqrt{4x^2 - 6x - 5}\right) = ...$

A. 4
B. 2
C. 1
D. $\frac{1}{2}$
E. $\frac{1}{4}$

TRIK SUPERKILAT: (Limit Fungsi Aljabar)

$$\lim_{x\to\infty}\left((2x-1) - \sqrt{4x^2 - 6x - 5}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - \sqrt{4x^2 - 6x - 5}\right)$$
$$= \frac{-2 - (-6)}{2\sqrt{4}}$$
$$= \frac{4}{4}$$
$$= 1$$

LOGIKA PRAKTIS:
Pada limit trigonometri yg memuat bentuk sinus atau tangen dan menghasilkan bentuk tak tentu 0/0 adalah mencoret sinus dan tangen dan menyisakan sudutnya saja. Lalu mencoret variabel yang sama pada pembilang dan penyebut.

☺

29. Nilai dari $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x^2 - 4)\cdot\tan(x+2)}{\sin^2(x+2)} = ...$

A. -4
B. -3
C. 0
D. 4
E. ∞

Cara Biasa: (Limit Fungsi Trigonometri)

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-4)\tan(x+2)}{\sin^2(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot\tan(x+2)}{\sin(x+2)\cdot\sin(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)}{\sin(x+2)}\cdot\lim_{x\to -2}\frac{\tan(x+2)}{\sin(x+2)}$$
$$= (-2-2)\cdot 1\cdot 1$$
$$= -4$$

TRIK SUPERKILAT
Coret sin dan tangen!

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-4)\tan(x+2)}{\sin^2(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x^2-4)(x+2)}{(x+2)^2}$$
$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)\cancel{(x+2)(x+2)}}{\cancel{(x+2)^2}}$$
$$= -2 - 2 = -4$$

LOGIKA PRAKTIS:
Nilai optimum fungsi $f(x)$ terjadi untuk x yang menyebabkan nilai turunan pertamanya $f'(x)$ sama dengan nol.

☺

30. Sebuah taman berbentuk persegi dengan keliling $(2x + 24)$ m dan lebar $(8 - x)$ m. Agar luas taman maksimum, maka panjang taman tersebut adalah ....

A. 4 m
B. 8 m
C. 10 m
D. 12 m
E. 13 m

Cara Biasa: (Aplikasi Turunan)

$$K = 2(p + \ell)$$
$$\Leftrightarrow 2x + 24 = 2(p + (8 - x))$$
$$\Leftrightarrow x + 12 = p + 8 - x$$
$$\Leftrightarrow p = x + 12 - 8 + x$$
$$\Leftrightarrow p = 2x + 4$$

$$L = p\cdot\ell$$
$$= (2x+4)(8-x)$$
$$= 16x - 2x^2 + 32 - 4x$$
$$= -2x^2 + 12x + 32$$
$$\Leftrightarrow L' = -4x + 12$$

Luas akan maksimum untuk x yang menyebabkan $L' = 0$

$$L' = 0$$
$$\Leftrightarrow -4x + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow -4x = -12$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$

Jadi panjang taman yang menyebabkan luas taman menjadi maksimum adalah:

$$p = 2x + 4$$
$$= 2(3) + 4$$
$$= 6 + 4$$
$$= 10 \text{ m}$$

LOGIKA PRAKTIS:
Untuk mengintegral yang pertama harus diperhatikan adalah pangkatnya silahkan ditambah 1, koefisiennya dibagi hasil penjumlahan pangkat dengan 1 tadi! Untuk integral tertentu, jangan lupa batas atas dulu disubstitusi ke hasil integral!

☺

31. Hasil dari $\int_0^2 3(x+1)(x-6)\,dx = ...$

A. -58
B. -56
C. -28
D. -16
E. -14

Cara Biasa: (Integral Tertentu Fungsi Aljabar)

$$\int_0^2 3(x+1)(x-6)\,dx = \int_0^2 (3x^2 - 15x - 18)\,dx$$
$$= \left[x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 18x\right]_0^2$$
$$= \left((2)^3 - \frac{15}{2}(2)^2 - 18(2)\right) - \left((0)^3 - \frac{15}{2}(0)^2 - 18(0)\right)$$
$$= \left(8 - \frac{60}{2} - 36\right) - (0)$$
$$= -58$$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

32. Nilai dari $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = ...$

A. $-\frac{1}{3}$

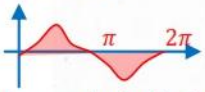
B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{2}{3}$

LOGIKA PRAKTIS:
Coba sketsa dulu grafik fungsi $f(x) = \sin^3 x$
Perhatikan!



Luas setiap bukit dan lembah adalah $\frac{4}{3}$ satuan luas.
Jadi luas setengah dari bukit adalah $\frac{2}{3}$.
☺

Cara Biasa: (Integral Tertentu Fungsi Trigonometri)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos^2 x \sin x)\,dx$$
$$= \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos 0 + \frac{1}{3}\cos^3 0\right)$$
$$= (-0+0) - \left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

33. Hasil dari $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = ...$

A. $\frac{1}{3}\sqrt{x^2+1} + C$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$

C. $2\sqrt{x^2+1} + C$

D. $3\sqrt{x^2+1} + C$

E. $6\sqrt{x^2+1} + C$

LOGIKA PRAKTIS:
Lihat! Soal di samping ini hanya menguji seberapa kemampuan kita dalam menemukan koefisien fungsi hasil integral.

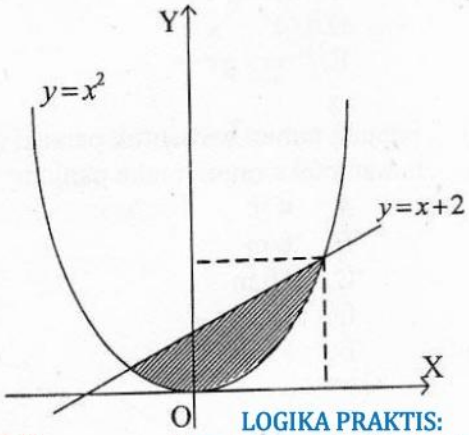
$$\int 2x(1x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$\frac{2}{1\cdot 2}\,\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 2$$

Selesai!
☺

TRIK SUPERKILAT: (Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar)

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \cancel{2x}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d(x^2+1)}{\cancel{2x}}\right)$$
$$= \int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2+1)$$
$$= \frac{2}{1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 2\sqrt{x^2+1} + C$$

34. Luas daerah yang diarsir pada gambar dapat dinyatakan dengan rumus….



A. $L = \int_{-1}^{2} (x+2+x^2)\,dx$

B. $L = \int_{-1}^{2} (x-2-x^2)\,dx$

C. $L = \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx$

D. $L = \int_{2}^{1} (-x+2+x^2)\,dx$

E. $L = \int_{-2}^{1} (-x+2+x^2)\,dx$

Catatan LOGIKA PRAKTIS:
Integral yang menyatakan luas daerah yang dibatasi $f(x)$ dan $g(x)$, dari $x = a$ sampai $x = b$ berbentuk:
$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Apabila a dan b adalah titik potong $f(x)$ dan $g(x)$ dan sekaligus menjadi batas integral, maka pastinya kedua nilai a dan b akan memenuhi
$f(a) - g(a) = 0$
atau
$f(b) - g(b) = 0$.

Sehingga dengan mudah, apabila kita substitusikan kedua batas integrasi, yaitu $x = a$ dan $x = b$ pada fungsi integran, maka hasilnya haruslah nol, kalau tidak nol berarti jawaban tersebut sudah PASTI SALAH!!!

TRIK SUPERKILAT: (Aplikasi Integral (Luas Daerah))
Mencari titik potong antara dua kurva:

$$y_1 = y_2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = x+2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)(x-2) = 0$$

Pembuat nol
$\Leftrightarrow x+1 = 0$ atau $x-2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 2$

Pada interval $-1 \le x \le 2$, $x+2 \ge x^2$.
Jadi, integral yang menyatakan luas daerah yang diarsir adalah:
$$L = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx$$
$$= \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx$$

LOGIKA PRAKTIS:
Fungsi integran ketika disubstitusi dengan batas integrasi harus nol!!!!!!
Kita akan cek jawaban A, B, C dengan mensubstitusi batas atas 2.
A. $2+2+4 \neq 0$
B. $2-2-4 \neq 0$
C. $2+2-4 = 0$
Kesimpulannya:
Jawaban A dan B PASTI SALAH!
Jawaban C mungkin aja benar!

Untuk pilihan jawaban D dan E kita akan cek dengan mensubstitusi batas atas 1.
D. $-1+2+1 \neq 0$
E. $-1+2+1 \neq 0$

YESSSS!!! Jawaban benar adalah C!
Selesai! ☺

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

35. Daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 1$ dan $y = x + 3$ di putar 360° mengelilingi sumbu X. Volume yang terjadi adalah ....

A. $36\frac{3}{5}\pi$ satuan volume

B. $36\frac{1}{5}\pi$ satuan volume

C. $32\frac{3}{5}\pi$ satuan volume

D. $23\frac{2}{5}\pi$ satuan volume

E. $23\frac{1}{5}\pi$ satuan volume

LOGIKA PRAKTIS:
Volume benda putar dari daerah yang dibatasi oleh y_1 dan y_2 jika diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° adalah:

$$V = \pi \int_a^b y_1^2 - y_2^2 \, dx$$

☺

Cara Biasa: (Aplikasi Integral (Volume Benda Putar))

Mencari titik potong dua kurva:

$$y_1 = y_2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = x + 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)(x-2) = 0$$

Pembuat nol

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ atau } x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ atau } x = 2$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} (f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{2} (x+3)^2 - (x^2+1)^2 \, dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8) \, dx$$
$$= \pi \left[-\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^{2}$$
$$= \pi \left[\begin{array}{l} \left(-\tfrac{1}{5}(2) - \tfrac{1}{3}(2)^3 + 3(2)^2 + 8(2)\right) \\ -\left(-\tfrac{1}{5}(-1)^5 - \tfrac{1}{3}(-1)^3 + 3(-1)^2 + 8(-1)\right) \end{array} \right]$$
$$= \pi \left(\frac{284}{15} - \left(\frac{67}{15}\right) \right)$$
$$= \pi \left(\frac{351}{15} \right) = 23\frac{6}{15} = 23\frac{2}{5} \text{ satuan volume}$$

36. Tabel berikut adalah hasil pengukuran tinggi badan sekelompok siswa.

Kelas	Tinggi badan	f	Kelas
1	150-154	4	4
2	155-159	10	14
3	160-164	6	20
4	165-169	8	28
5	170-174	4	32
6	175-179	8	40
	Jumlah	40	

Kuartil bawah artinya Q_1

Jumlah data sebanyak $n = 40$, maka diperoleh $\frac{1}{4}n = 10$

Q_1 terletak pada data ke-10, yaitu di kelas ke-2. *(Perhatikan kolom f_k ≤, jelas terlihat bahwa kelas ke-2 memuat data ke-5 sampai 14)*

Jadi, letak kelas Q_1 yaitu pada kelas interval 155 – 159 yang memiliki nilai tepi bawah kelas Q_1 adalah 154,5, panjang kelas interval 5, dan frekuensi Q_1 adalah 10.

Frekuensi kumulatif kurang dari 154, 5 adalah 4.

Catatan LOGIKA PRAKTIS:
Urutan variabel yang harus dicari perhatikan diagram alur berikut:

$$Q_3 = T_b + \left(\frac{\frac{3}{4}n - f_k}{f_{Q_3}} \right) \cdot p$$

☺

Kuartil bawah dari data pada tabel tersebut adalah ....

A. 155,5 cm

B. 156,5 cm

C. 157,5 cm

D. 158,5 cm

E. 159,5 cm

Cara Biasa: (Statistika (Ukuran Letak))

$$Q_1 = T_b + \left(\frac{\frac{1}{4}n - f_k}{f_{Q_1}} \right) \cdot p$$
$$= 154{,}5 + \left(\frac{10 - 4}{10} \right) \cdot 5$$
$$= 154{,}5 + 3 = 157{,}5$$

LOGIKA PRAKTIS:
Letak kuartil bawah adalah data ke-10, karena sampai kelas pertama sudah ada 4 data, dan kurang 6 data lagi untuk mencapai kuartil bawah, maka dengan interpolasi linear akan diperoleh penambahan dari tepi bawah kelas kedua adalah 6/10 kali panjang interval kelasnya.
Q1 = 154,5+(6/10)5=157,5 ☺

37. Banyak bilangan terdiri dari 3 angka berbeda lebih dari 200 yang dapat disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 5, 7, 9 adalah ....

A. 100

B. 92

C. 80

D. 78

E. 68

LOGIKA PRAKTIS:
Perhatikan syarat bilangan yang disusun:
- Harus lebih dari 200
- Harus berbeda (tidak boleh ada angka yang berulang)

☺

Cara Biasa: (Kaidah Pencacahan (Aturan Pengisian Tempat))

Banyak bilangan yang terdiri tiga angka berbeda lebih dari 200:
- Angka ratusan : ada 5 cara, yaitu diisi dengan angka 2, 3, 4, 5, 7, 9. Misal kita pilih angka 2 sebagai angka ratusan.
- Angka puluhan : ada 5 cara, yaitu diisi dengan angka 1, 3, 4, 5, 7, 9. Misal kita pilih angka 3 sebagai angka puluhan.
- Angka ratusan : ada 4 cara, yaitu diisi dengan angka 1, 4, 5, 7, 9.

Angka ratusan	Angka puluhan	Angka satuan	Banyak bilangan
5	5	4	$5 \times 5 \times 4 = 100$ bilangan

38. Empat siswa dan dua siswi akan duduk berdampingan. Apabila siswi selalu duduk paling pinggir, banyak cara mereka duduk adalah….

A. 24

B. 48

C. 56

D. 64

E. 72

LOGIKA PRAKTIS:
Untuk mempermudah perhitungan. Ingatlah! Permutasi n unsur dari r unsur itu perkalian r angka terakhir dari n
${}_4P_4$ = perkalian 4 angka terakhir dari 4 =
$= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$= 24$

☺

Cara Biasa: (Kaidah Pencacahan (Aturan Pengisian Tempat))

Banyak cara mengisi tempat duduk paling pinggir:
- Pinggir pojok kiri : ada 2 cara, yaitu diisi cewek1 dan cewek2. Misal kita pilih angka cewek1 yang duduk di pojok kiri.
- Pinggir pojok kanan : ada 1 cara, yaitu diisi dengan cewek2.

Banyak cara mengisi 4 tempat duduk yang ditengah:
- Kursi paling pojok kiri, diisi sebanyak 4 cara, yaitu cowok1, cowok2, cowok3, cowok4. Misal cowok1 mengisi kursi paling pojok kiri.
- Kuri berikutnya akan bisa diisi sebanyak 3 cara, 2 cara dan 1 cara.

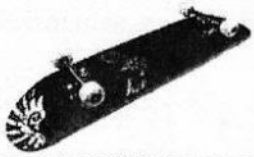
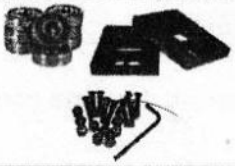
Kursi pojok kiri	4 buah kursi yang ada di tengah	Kursi pojok kanan	Banyak kemungkinan
2	$4 \times 3 \times 2 \times 1$	1	$2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1$ = 48 kemungkinan

Cara Biasa: (Permutasi)

n = susunan cewek × susunan cowok
$= {}_2P_2 \cdot {}_4P_4$
$= \frac{2!}{(2-2)!} \cdot \frac{4!}{(4-4)!}$
$= 2! \cdot 4!$
$= (2 \times 1) \cdot (4 \times 3 \times 2 \times 1)$
$= 2 \cdot 24$
$= 48$ kemungkinan

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

39. Erik suka sekali main skateboard. Dia mengunjungi sebuah toko bersama SKATERS untuk mengetahui beberapa model.
Di toko ini dia dapat membeli skateboard yang lengkap. Atau, ia juga dapat membeli sebuah papan, satu set roda yang terdiri dari 4 roda, satu set sumbu yang terdiri dari dua sumbu, dan satu set perlengkapan kecil untuk dapat merakit skateboard sendiri.
Daftar barang dan model/jenis skateboard di toko ini sebagai berikut:

Barang	Model/Jenis	
Skateboard lengkap		
Papan		
Dua set roda yang terdiri dari 4 roda		
Satu set sumbu yang terdiri dari dua sumbu		
Dua set perlengkapan kecil (seperti baut, mur, dan karet)		

Toko itu menawarkan tiga macam papan, dua macam set roda, dan dua macam set perlengkapan kecil. Hanya ada satu macam set sumbu.
Berapa banyak skateboard berbeda yang dapat dibuat oleh Erik?

A. 6
B. 8
C. 10
D. 12
E. 24

LOGIKA PRAKTIS:
Kita perlu memahami makna dari kalimat berikut:
"Skateboard yg dapat dibuat oleh Erik"
Artinya adalah berapa banyak skateboard yang bisa dibuat dengan menyusun bagian-bagian dari skateboard tersebut. Perhatikan, Erik bisa membeli:
- 3 papan
- 2 set roda
- 1 set sumbu
- 2 set perlengkapan kecil.

Gunakan aturan perkalian untuk menyelesaikan soal ini! ☺

Cara Biasa: (Kaidah Pencacahan (Aturan Perkalian))
Banyaknya kemungkinan skateboard berbeda yang dapat dibuat oleh Erik adalah hasil perkalian antara banyaknya papan, banyaknya set roda, banyaknya set sumbu, dan banyaknya set perlengkapan kecil, yaitu:

$n = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ kemungkinan

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

LOGIKA PRAKTIS:
Jawaban A, ya nggak gitu juga kali!
Dua pertiga itu peluang terjadinya gempa bumi, bukan masalah kapan terjadinya. Tapi TERJADI atau TIDAK nya gempa bumi!!!

Jawaban B, ya nggak gitu juga kali! Kita yakin akan terjadi itu kalau nilai peluangnya sama dengan 1. Dan tidak mungkin akan terjadi jika peluangnya sama dengan 0.

- $P(A) = 1$ artinya PASTI
- $P(A) = 0$ artinya MUSTAHIL
- $0 < P(A) < 1$ artinya BISA JADI!! BISA JADI!! BISA JADI!!! YAA!! YAA!!! TIDAK!! TIDAK!!

Jawaban C ini yang benar.... karena $P(A) > P(A^C)$, maka peluang terjadinya gempa lebih besar dari peluang tidak terjadinya gempa.

Jawaban D bisa dibilang benar juga sih... Tapi jawaban ini lahir bukan dari pernyataan, tapi dari kepercayaan kita akan suatu hal gaib. Hehehe... Melenceng dari maksud soal. Ditanya apa, jawabnya apa....!

Jawaban E lebay banget deh! Suatu hal pasti terjadi itu jika nilai peluangnya sama dengan 1. Jawaban E salah!

☺

40. Sebuah film dokumenter menayangkan perihal gempa bumi dan seberapa sering gempa bumi terjadi. Film itu mencangkup diskusi tentang keterkiraan gempa bumi. Seorang ahli geologi menyatakan: "Dalam dua puluh tahun ke depan, peluang bahwa sebuah gempa bumi akan terjadi di kota Zadia adalah dua per tiga."
Manakah di bawah ini yang paling mencerminkan maksud pernyataan ahli geologi tersebut?

A. $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$, sehingga antara 13 dan 14 tahun dari sekarang akan terjadi sebuah gempa bumi di kota Zadia.
B. $\frac{2}{3}$ lebih besar dari pada $\frac{1}{2}$, sehingga kita dapat meyakini bahwa akan terjadi sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan.
C. Peluang terjadinya sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan lebih tinggi dari pada peluang tidak terjadinya gempa bumi.
D. Kita tak dapat mengatakan apa yang akan terjadi, karena tidak seorang pun dapat meyakinkan kapan sebuah gempa bumi akan terjadi.
E. Pasti akan terjadi gempa bumi 20 tahun yang akan datang, karena sudah diperkirakan oleh ahli geologi.

Cara Biasa: (Peluang Kejadian)
Peluang kejadian gempa bumi di kota Zadia adalah dua per tiga.
Misal A = kejadian gempa bumi di kota Zadia 20 tahun ke depan, berarti:
$P(A) = \frac{2}{3}$
Sehingga misal A^C = kejadian tidak terjadi gempa bumi di kota Zadia 20 tahun ke depan, maka peluang tidak terjadinya gempa bumi di kota Zadia adalah:
$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Jadi karena $P(A) > P(A^C)$, maka peluang terjadinya gempa bumi di kota Zadia 20 tahun ke depan lebih besar daripada peluang tidak terjadinya gempa bumi.

Pembahasan Soal UN Matematika SMA 2013 Paket 2 ini ditulis oleh Pak Anang.
Silahkan kunjungi http://pak-anang.blogspot.com untuk pembahasan soal UN 2013 yang lain.

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD