DOKUMEN NEGARA
SANGAT RAHASIA

Matematika SMA/MA IPA

PEMBAHASAN
UJIAN NASIONAL

TAHUN PELAJARAN 2012/2013

Paket Soal 4

SMA/MA
PROGRAM STUDI
IPA

MATEMATIKA
Rabu, 17 April 2013 (07.30 – 09.30)

Oleh:

Pak Anang

http://pak-anang.blogspot.com

PUSPENDIK
BALITBANG

BSNP
Badan Standar Nasional Pendidikan

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

Nama : Pak Anang

No Peserta : http://pak-anang.blogspot.com

LOGIKA PRAKTIS:
Silogisme:
$p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow r$
$\therefore p \Rightarrow r$

Modus ponens:
$p \Rightarrow q$
$\sim q$
$\therefore \sim p$

1. Diketahui premis-premis berikut:
Premis 1 : Jika panen melimpah, maka penghasilan petani meningkat.
Premis 2 : Jika penghasilan petani meningkat, maka mereka makmur.
Premis 3 : Petani tidak makmur.

Kesimpulan yang sah dari ketiga premis tersebut adalah ...
A. Penghasilan petani tidak meningkat.
B. Penghasilan petani menurun.
C. Penen tidak melimpah.
D. Petani tidak panen.
E. Petani gagal panen.

Kata "penghasilan" sudah muncul di premis 1 dan 2, maka "penghasilan" ga mungkin muncul di jawaban!
Jawaban A dan B juga salah!
Konteks yg dibicarakan adalah panen melimpah atau tidak, bukan tidak atau gagal panen.
Jawaban D dan E juga salah!
Jadi jawabannya pasti C!
☺

TRIK SUPERKILAT: (Penarikan Kesimpulan)
panen melimpah ⇒ penghasilan meningkat
penghasilan meningkat ⇒ makmur
~ Makmur

panen melimpah ⇒ ~ makmur
~ makmur
∴ ~ melimpah

2. Pernyataan setara dengan "Jika Budin sarapan pagi, maka ia tidak mengantuk di kelas" adalah ...
A. Jika Budin sarapan pagi maka ia mengantuk di kelas.
B. Jika Budin mengantuk di kelas maka ia sarapan pagi.
C. Jika Budin mengantuk di kelas maka ia tidak sarapan pagi.
D. Jika Budin tidak sarapan pagi maka ia mengantuk di kelas.
E. Jika Budin tidak sarapan pagi maka ia tidak mengantuk di kelas.

LOGIKA PRAKTIS:
Ingat $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
"sarapan ⇒ ~ mengantuk".
Sarapan pagi jangan di depan, jawaban A, D, E pasti salah!
Sarapan pagi harus dibelakang dan dinegasikan. berarti jawaban B pasti salah!
Jadi jawabannya pasti C!
☺

TRIK SUPERKILAT: (Pernyataan Senilai Implikasi)
sarapan ⇒ ~ mengantuk
≡ mengantuk ⇒ ~ sarapan
≡ ~ sarapan ∨ mengantuk

3. Bentuk sederhana dari $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \ldots.$
A. $-6-\sqrt{35}$
B. $-6+\sqrt{35}$
C. $6-\sqrt{35}$
D. $12-2\sqrt{35}$
E. $12+2\sqrt{35}$

LOGIKA PRAKTIS:
- Hasil perkalian pembilang: bilangan bulat bertanda plus dan bentuk akar bertanda min.
- Bilangan depan penyebut lebih kecil, artinya hasil perkalian bentuk sekawan pasti negatif.

Maka jawaban yang benar pasti bilangan bulat bertanda min dan bentuk akar bertanda plus!
Dan jawaban benar hanya B!
☺

Cara Biasa: (Rasionalisasi Bentuk Akar)
$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$$
$$= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{7})-\sqrt{7}(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}$$
$$= \frac{5-\sqrt{35}-\sqrt{35}+7}{5-7}$$
$$= \frac{12-2\sqrt{35}}{-2}$$
$$= \frac{-2(-6+\sqrt{35})}{-2}$$
$$= -6+\sqrt{35}$$

4. Bentuk sederhana dari $\frac{{}^2\log^2 a - {}^2\log^2 b}{{}^2\log ab}$ adalah ....
A. ${}^2\log\left(\frac{a}{b}\right)$
B. ${}^2\log(ab)$
C. ${}^2\log(a-b)$
D. ${}^2\log(a+b)$
E. ${}^2\log(a+b)^2$

LOGIKA PRAKTIS:
Ingat sifat logaritma berikut:
${}^a\log^2 b = {}^a\log b \cdot {}^a\log b$
${}^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log(bc)$
${}^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log\left(\frac{b}{c}\right)$
☺

Cara Biasa: (Logaritma)
$$\frac{{}^2\log^2 a - {}^2\log^2 b}{{}^2\log ab} = \frac{({}^2\log a + {}^2\log b)({}^2\log a - {}^2\log b)}{{}^2\log a + {}^2\log b}$$
$$= {}^2\log a - {}^2\log b$$
$$= {}^2\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

5. Akar-akar persamaan $x^2 + (a-1)x + 2 = 0$ adalah α dan β. Jika $\alpha = 2\beta$ dan $a > 0$ maka nilai $a = \ldots$.

A. 2
B. 3
C. 4
D. 6
E. 8

LOGIKA PRAKTIS:
Misal Persamaan Kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki akar-akar yaitu α dan β.
Apabila $\alpha = n\beta$, maka berlaku $nb^2 = (n+1)^2 ac$
☺

TRIK SUPERKILAT:
(Persamaan Kuadrat (PK))
PK: $x^2 + (a-1)x + 2 = 0$
$\Rightarrow a = 1; b = (a-1); c = 2$
Sifat perbandingan akar-akar PK adalah $\alpha = 2\beta \Rightarrow n = 2$

$nb^2 = (n+1)^2 ac$
$\Leftrightarrow \not{1}(a-1)^2 = (3)^2(1)(\not{2})$
$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 9$
$\Leftrightarrow (a-1) = \pm 3$
Sehingga,
$a = 1 + 3 = 4$ atau ~~$a = 1 - 3 = -2$~~ Tidak memenuhi
Jadi, karena $a > 0$, maka nilai $a = 4$

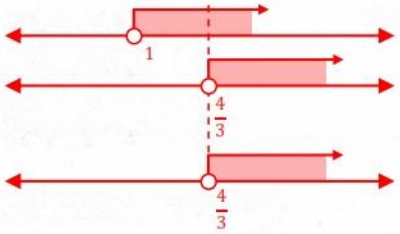
6. Nilai a yang menyebabkan fungsi kuadrat fungsi kuadrat $f(x) = (a-1)x^2 + 2ax + (a+4)$ definit positif adalah ....

A. $a < \frac{4}{3}$
B. $a < 1$
C. $a > 1$
D. $a > \frac{4}{3}$
E. $1 < a < \frac{4}{3}$

LOGIKA PRAKTIS:
Definit positif terjadi apabila nilai $f(x)$ selalu positif
Artinya, grafik $f(x)$ selalu hadap ke atas, syarat $a > 0$.
Gafik $f(x)$ tidak berpotongan dengan sb X, syaratnya $D < 0$.
☺

Cara Biasa: (Fungsi Kuadrat (FK))
Syarat FK definit positif:
- $a > 0 \Rightarrow a - 1 > 0$
  $\Leftrightarrow a > 1$
- $D < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$
  $\Leftrightarrow (2a)^2 - 4(a-1)(a+4) < 0$
  $\Leftrightarrow 4a^2 - 4(a^2 + 3a - 4) < 0$
  $\Leftrightarrow 4a^2 - 4a^2 - 12a + 16 < 0$
  $\Leftrightarrow -12a + 16 < 0$
  $\Leftrightarrow -12a < -16$
  $\Leftrightarrow a > \frac{4}{3}$

Nilai p yang memenuhi adalah irisan dari $a > 1$ dan $a > \frac{4}{3}$ pada garis bilangan:



Jadi nilai a yang memenuhi adalah $a > \frac{4}{3}$

7. Agar persamaan kuadrat $4x^2 - (p-3)x + 1 = 0$ mempunyai dua akar tidak nyata, maka nilai p yang memenuhi adalah ....

A. $-1 < p < 7$
B. $-7 < p < 1$
C. $1 < p < 7$
D. $p < -1$ atau $p > 7$
E. $p < 1$ atau $p > 7$

LOGIKA PRAKTIS:
Ingat rumus abc:
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- $D \geq 0$, akar-akar PK real,
  ✓$D > 0$, akar real berbeda.
  ✓$D = 0$, akar real kembar.
- $D < 0$, akar-akar PK imajiner.

☺

Cara Biasa: (Diskriminan Persamaan Kuadrat (PK))
$D < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$
$\Leftrightarrow (-(p-3))^2 - 4(4)(1) < 0$
$\Leftrightarrow p^2 - 6p + 9 - 16 < 0$
$\Leftrightarrow p^2 - 6p - 7 < 0$
Pembuat nol
$\Leftrightarrow (p+1)(p-7) = 0$
$\Leftrightarrow p = -1$ atau $p = 7$

Nilai p yang memenuhi pertidaksamaan tersebut bisa dilihat pada garis bilangan:

Jadi nilai p yang menyebabkan akar-akar PK tersebut imajiner adalah $1 < p < 7$

8. Amir, Budi, dan Citra membeli buku dan pulpen yang sama di sebuah toko. Amir membeli 3 buku dan 4 pulpen seharga Rp30.500,00. Budi membeli 5 buku dan 2 pulpen seharga Rp27.500,00. Citra membeli 4 buku dan 1 pulpen, untuk itu ia harus membayar seharga ....

A. Rp14.500,00
B. Rp18.000,00
C. Rp19.000,00
D. Rp19.500,00
E. Rp23.500,00

LOGIKA PRAKTIS:
Gunakan metode Determinan Matriks untuk menyelesaikan soal SPL:
$4x + y = 4\frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D}$
$= \frac{4D_x + D_y}{D}$
☺

Cara Biasa: (Sistem Persamaan Linear)
$3b + 4p = 30.500 \mid \times 1 \mid \quad 3b + 4p = 30.500$
$5b + 2p = 27.500 \mid \times 2 \mid \quad 10b + 4p = 55.000$
$-7b = -24.500 \Rightarrow b = 3.500$

$b = 3.500 \Rightarrow 5(3.500) + 2p = 27.500$
$\Leftrightarrow 2p = 27.500 - 17.500$
$\Leftrightarrow 2p = 10.000$
$\Leftrightarrow p = 5.000$

$4b + p = 4(3.500) + (5.000)$
$= 14.000 + 5.000$
$= 19.000$
Jadi, untuk membeli 4 buku dan 1 pulpen, maka Citra harus membayar sebesar Rp19.000,00

9. Persamaan lingkaran dengan pusat (5, 2) dan berdiameter $2\sqrt{13}$ adalah ....

A. $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 34 = 0$
B. $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 16 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 16 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0$
E. $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 34 = 0$

LOGIKA PRAKTIS:
Perhatikan!
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
Dari pembentukan persamaan lingkaran, nilai A dan B adalah negatif dua kalinya dari pusat lingkaran, maka kita pasti bisa menentukan koefisien $x = -10$, dan pastinya koefisien $y = -4$.
☺

Cara Biasa: (Persamaan Lingkaran)
$P = (5, 2) \Rightarrow a = 5; b = 2$
$d = 2\sqrt{13} \Rightarrow r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(2\sqrt{13}) = \sqrt{13}$
Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan jari-jari r:
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(x-5)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{13})^2$
$\Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-2)^2 = 13$
$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 13$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 29 - 13 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

10. Diketahui $(x+2)$ adalah faktor suku banyak $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + p$. Salah satu faktor linear lainnya dari suku banyak tersebut adalah ....

A. $(2x+1)$
B. $(2x-3)$
C. $(2x+3)$
D. $(x+3)$
E. $(x-3)$

LOGIKA PRAKTIS:
$(x+2)$ faktor dari $f(x)$ jika dan hanya jika $f(-2) = 0$
Jadi kita harus membuktikan dulu bahwa $f(-2) = 0$.
Lalu dengan metode horner, kita akan mencari hasil pembagian $f(x)$ oleh $(x+2)$, dan hasil pembagian tersebut difaktorkan untuk mencari faktor yang lain ☺

Cara Biasa: (Teorema Faktor)
$(x+2)$ faktor dari $f(x) \Leftrightarrow f(-2) = 0$
$f(-2) = 0 \Rightarrow 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 11(-2) + p = 0$
$\Leftrightarrow \quad -16 - 12 + 22 + p = 0$
$\Leftrightarrow \quad -6 + p = 0$
$\Leftrightarrow \quad p = 6$
Jadi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

-2	2	-3	-11	6
		-4	14	-6
	2	-7	3	0

Sehingga diperoleh hasil bagi:
$2x^2 - 7x + 3 \Rightarrow (x-3)(2x-1)$
Jadi, salah satu faktor $f(x)$ adalah $(x-3)$

11. Diketahui $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 5x + 1$. Fungsi komposisi $(gof)(x) = ...$

A. $x^2 + x - 5$
B. $x^2 + x + 10$
C. $x^2 + x + 13$
D. $x^2 - 5x + 13$
E. $x^2 - 5x + 4$

LOGIKA PRAKTIS:
Cek nilai $(g \circ f)(x)$ dan salah satu diantara jawaban A, B, C, D, E haruslah bernilai sama ketika disubstitusi dg sebuah nilai x!
Nilai x yang paling mudah disubstitusikan adalah $x = 0$!
Hanya jawaban A yang benar! ☺

Cara Biasa: (Komposisi Fungsi)
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(x+3)$
$= (x+3)^2 - 5(x+3) + 1$
$= x^2 + 6x + 9 - 5x - 15 + 1$
$= x^2 + x - 5$

TRIK SUPERKILAT:
Misal $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow g(3) = -5$
Kita cek pada jawaban:
A. $f(0) = 0 - 0 - 5 = -5$ (BENAR!)
B. $f(0) = 0 - 0 + 10 \neq -5$ (salah!)
C. $f(0) = 0 - 0 + 13 \neq -5$ (salah!)
D. $f(0) = 0 - 0 + 13 \neq -5$ (salah!)
E. $f(0) = 0 - 0 + 4 \neq -5$ (salah!)

12. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x-1}; x \neq \dfrac{1}{3}$. Invers fungsi $f(x)$ adalah $f^{-1}(x) = ...$

A. $\dfrac{2-5x}{3x+1}; x \neq -\dfrac{1}{3}$
B. $\dfrac{3x-1}{5x+2}; x \neq -\dfrac{2}{5}$
C. $\dfrac{x+2}{3x-5}; x \neq \dfrac{5}{3}$
D. $\dfrac{2-x}{3x+1}; x \neq -\dfrac{1}{3}$
E. $\dfrac{x-2}{3x+5}; x \neq -\dfrac{5}{3}$

LOGIKA PRAKTIS:
Perhatikan
$g(x) = \dfrac{5x+2}{3x-1}$ (5 pindah menjadi -5)
Dan lihat pilihan jawaban yang memenuhi (konstanta pada penyebut adalah -5) hanya C. ☺

Cara Biasa: (Invers Fungsi)
$f(x) = \dfrac{5x+2}{3x-1}$
$y = \dfrac{5x+2}{3x-1}$
$y(3x-1) = 5x+2$
$3xy - y = 5x + 2$
$3xy - 5x = y + 2$
$x(3y-5) = y + 2$
$x = \dfrac{y+2}{3y-5}$
$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3x-5}$

TRIK SUPERKILAT:
Perhatikan letak a dan d ditukar dan dikalikan negatif (tanda berubah)

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$

$\therefore f(x) = \dfrac{5x+2}{3x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1x+2}{3x-5}$

13. Luas daerah parkir 1.760 m^2. Luas rata-rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil besar 20 m^2. Daya tampung maksimum hanya 200 kendaraan. Biaya parkir mobil kecil Rp1.000,00/jam dan mobil besar Rp2.000,00/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang pergi dan datang, penghasilan maksimum tempat parkir adalah ....

A. Rp176.000,00
B. Rp200.000,00
C. Rp260.000,00
D. Rp300.000,00
E. Rp340.000,00

LOGIKA PRAKTIS:
Cari gradien yaitu nilai perbandingan dari koefisien x dan y.
Apabila dicari nilai maksimum:
- $m_1 < m_f < m_2$, maka titik optimum berada di titik potong kedua fungsi kendala.
- m_f paling kecil, titik optimum di sumbu Y.
- m_f paling besar, titik optimum di sumbu X.

☺

TRIK SUPERKILAT:
$4x + 20y \leq 1.760 \Rightarrow m_1 = 4/20$
$x + y \leq 200 \Rightarrow m_2 = 1/1$
$f(x,y) = 1.000x + 2.000y \Rightarrow m_f = 1/2$
Karena $m_1 < m_f < m_2$, maka letak titik optimum adalah pada titik potong antara kedua fungsi kendala.

(Gunakan metode determinan matriks)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 440 \\ 1 & 200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-240}{-4} = 60$$

$x + y = 200 \Rightarrow x + 60 = 200$
$\Leftrightarrow \quad x = 140$

Jadi, nilai maksimumnya adalah:
$f(140, 60) = 1.000(140) + 2.000(60)$
$= \text{Rp}260.000,00$

14. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & c \end{pmatrix}$.
Jika $AB = C$, maka $a + b + c = ...$

A. 3
B. 5
C. 7
D. 9
E. 11

LOGIKA PRAKTIS:
Pada soal di samping, kita hanya perlu melihat baris dan kolom manakah yang bersesuaian dg variabel-variabel yang ditanyakan. Lalu selesaikanlah operasi aljabar yang memuat variabel-variabel tersebut! ☺

Cara Biasa: (Matriks)
$AB = C$
$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & b \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & c \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} (1)(3)+(a)(-1) & (1)(b)+(a)(1) \\ (2)(3)+(-1)(-1) & (2)(b)+(-1)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & c \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3-a & b+a \\ 6+1 & 2b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & c \end{pmatrix}$

$3 - a = 1 \Rightarrow -a = 1 - 3$
$\Leftrightarrow \quad a = 2$
$b + a = 4 \Rightarrow b + 2 = 4$
$\Leftrightarrow \quad b = 2$
$2b - 1 = c \Rightarrow 2(2) - 1 = c$
$\Leftrightarrow \quad 3 = c$
Jadi,
$a + b + c = 2 + 2 + 3 = 7$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

LOGIKA PRAKTIS:
$2\vec{b}$ artinya kalikan vektor $\vec{b}$ dengan bilangan 2.
Lalu selesaikanlah operasi aljabar vektor tersebut!
☺

15. Diketahui vektor – vektor $\vec{a} = 2i + 3j + k$, $\vec{b} = 3i - 2k$, dan $\vec{c} = 2j - 5k$.
Vektor $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ adalah ....

A. $5i + 5j - 6k$
B. $8i - 5j - 6k$
C. $8i - 3j + 12k$
D. $8i - j + 12k$
E. $8i - j + 10k$

Cara Biasa: (Operasi Aljabar Vektor)

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = 2\vec{j} - 5\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

LOGIKA PRAKTIS:
Soal di samping cukup menjebak.
Perhatikan, pertanyaan pada soal adalah nilai sinus, bukan nilai cosinus!
Ingatlah pada identitas trigonometri berikut:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
atau
$\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$
☺

16. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Nilai sinus sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{c}$ adalah ....

A. $\frac{5}{7}$
B. $\frac{11}{14}$
C. $-\frac{5\sqrt{3}}{14}$
D. $\frac{5}{11}\sqrt{3}$
E. $\frac{3\sqrt{5}}{14}$

Cara Biasa: (Sudut antara dua vektor)

$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}}$

$= \frac{2 + 6 + 3}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$

$= \frac{11}{14}$

$\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$
$= \pm\sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2}$
$= \pm\sqrt{1 - \frac{121}{196}}$
$= \pm\sqrt{\frac{196 - 121}{196}}$
$= \pm\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{196}}$
$= \pm\frac{\sqrt{25}\sqrt{3}}{14}$
$= \pm\frac{5\sqrt{3}}{14}$

LOGIKA PRAKTIS:
Vektor proyeksi $\vec{u}$ pada $\vec{v}$
$\vec{c} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) \cdot \vec{v}$
Terlihat jelas vektor proyeksi $\vec{c}$ adalah kelipatan dari vektor $\vec{v}$, sehingga disimpulkan bahwa:
- koefisien $\vec{i}$ dan koefisien $\vec{j}$ memiliki tanda yang sama
- koefisien $\vec{k}$ sama dengan nol

Kesimpulannya:
- Jawaban A salah karena tanda koefisien $\vec{i}, \vec{j}$ tidak sama.
- Jawaban D dan E SALAH!!!! Karena nilainya koefisien $\vec{k}$ harusnya nol.

☺

17. Diketahui vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Proyeksi vektor $\vec{u}$ pada $\vec{v}$ adalah ....

A. $\frac{4}{5}i - \frac{8}{5}j$
B. $-\frac{4}{5}i - \frac{8}{5}j$
C. $\frac{4}{5}i + \frac{8}{5}j$
D. $\frac{4}{5}i - \frac{8}{5}j + \frac{4}{5}k$
E. $-\frac{4}{5}i - \frac{8}{5}j + \frac{4}{5}k$

Cara Biasa: (Proyeksi vektor)

Proyeksi $\vec{u}$ ke $\vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) \cdot \vec{v}$

$= \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 0^2}\right)^2} \cdot \vec{v}$

$= \left(\frac{12 - 24 + 0}{\left(\sqrt{45}\right)^2}\right) \cdot \vec{v}$

$= -\frac{4}{15} \cdot \vec{v} = -\frac{4}{15}(-3\vec{i} - 6\vec{j}) = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{8}{5}\vec{k}$

18. Koordinat bayangan titik A(–1, 3) jika dicerminkan terhadap garis $x = 4$ dan dilanjutkan pencerminan terhadap sumbu Y adalah ....

A. (9, –3)
B. (–9, 3)
C. (9, 3)
D. (–9, –3)
E. (–3, –9)

LOGIKA PRAKTIS:
Pencerminan berturut terhadap garis $x = a$, lalu dilanjutkan pencerminan terhadap $y = b$ bisa diringkas menjadi pencerminan terhadap titik (a, b).
Sehingga, rumus transformasinya adalah:
$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{(a,b)}} P' = \begin{pmatrix} 2a - x \\ 2b - y \end{pmatrix}$
☺

Cara Biasa: (Transformasi)

$A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{x=4}} A' = \begin{pmatrix} 2(-4) + (-1) \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{sbY}} A'' = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

19. Himpunan penyelesaian dari ${}^{36}\log(x-4)+{}^{36}\log(x+1)<\frac{1}{2}$ adalah ....

A. $\{x \mid 4 < x < 5\}$
B. $\{x \mid -1 < x < 4\}$
C. $\{x \mid x < -1 \text{ atau } x > 4\}$
D. $\{x \mid -1 < x < 5 \text{ atau } -2 < x < 4\}$
E. $\{x \mid -2 < x < -1 \text{ atau } 4 < x < 5\}$

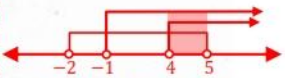
LOGIKA PRAKTIS:
Pilihan jawaban haruslah memenuhi syarat numerus dimana numerus logaritma tidak boleh nol dan negatif.
$x-4>0 \Rightarrow x>4$, sehingga jawaban B, C, D, E SALAH..!!
Jadi tanpa banyak langkah lagi, kita tahu bahwa jawaban yang benar sudah pasti jawaban A! ☺

Cara Biasa: (Pertidaksamaan Logaritma)

$${}^{36}\log(x-4)+{}^{36}\log(x+1)<\tfrac{1}{2}$$
$${}^{36}\log(x-4)(x+1)<{}^{36}\log 36^{\frac{1}{2}}$$
$${}^{36}\log(x^2-3x-4)<{}^{36}\log 6$$
$$x^2-3x-4<6$$
$$x^2-3x-10<0$$
$$(x+2)(x-5)<0$$

Pembuat nol: $x=-2$ atau $x=5$

Syarat numerus logaritma:
$x-4>0$ dan $x+1>0$
$x>4$ $\quad x>-1$



Jadi HP $\{x \mid 4 < x < 5\}$

Jawaban B, C, D, E SALAH, karena masih memuat bilangan yang kurang dari 4..!!

20. Persamaan grafik fungsi pada gambar adalah ....

A. $y=2\cdot 2^x$
B. $y=(-2)\cdot 3^x$
C. $y=2\cdot 3^x$
D. $y=3\cdot 2^x$
E. $y=(-3)\cdot 2^x$

LOGIKA PRAKTIS:
Karena jawaban A, B, C, D, E mirip, maka langsung cek aja menggunakan titik-titik yang dilewati oleh grafik fungsi tersebut.
Cek pada jawaban apabila disubstitusikan $x=2$, maka $y=2$ dan $x=3$, maka $y=8$.
Dan ternyata jawaban benar hanya jawaban A!

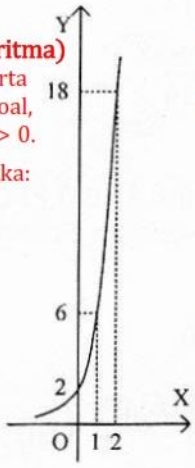
Cara Biasa: (Fungsi Eksponen atau Logaritma)

Grafik $y=f(x)$ monoton naik menuju ∞, serta lihat pola pilihan jawaban A, B, C, D, E pada soal, maka persamaan grafik adalah $y=a\cdot b^x, b>0$.

Perhatikan, karena $f(x)$ melewati $(0,\ 2)$, maka:
$x=0, y=2 \Rightarrow 2=a\cdot b^0$
$\Leftrightarrow 2=a\cdot 1$
$\Leftrightarrow 2=a$

Karena $f(x)$ melewati titik $(1,6)$ maka:
$x=1, y=6 \Rightarrow 6=2\cdot b^1$
$\Leftrightarrow \frac{6}{2}=b$
$\Leftrightarrow 3=b$

Jadi fungsi tersebut adalah $y=2\cdot 3^x$



TRIK SUPERKILAT:
Uji titik (0, 2), (1, 6) dan (2, 18) pada setiap jawaban.

A. $(0,2) \Rightarrow 2=2\cdot 2^0$
$\Leftrightarrow 2=2$ (benar)
$(1,6) \Rightarrow 6=2\cdot 2^1$
$\Leftrightarrow 6\neq 4$ (salah)

B. $(0,2) \Rightarrow 2=(-2)\cdot 2^0$
$\Leftrightarrow 2\neq -2$ (salah)

C. $(0,2) \Rightarrow 2=2\cdot 3^0$
$\Leftrightarrow 2=2$ (benar)
$(1,6) \Rightarrow 6=2\cdot 3^1$
$\Leftrightarrow 6=6$ (benar)

D. $(0,2) \Rightarrow 2=3\cdot 2^0$
$\Leftrightarrow 2\neq 3$ (salah)

E. $(0,2) \Rightarrow 2=(-3)\cdot 2^0$
$\Leftrightarrow 2\neq -3$ (salah)

Jadi, jawaban benar adalah C.

21. Diketahui suku ke-3 dan suku ke-6 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 8 dan 17. Jumlah 21 suku pertama deret tersebut adalah ....

A. 630
B. 651
C. 665
D. 670
E. 672

LOGIKA PRAKTIS:
Tips mencari suku ke-n: $U_p=U_q+(p-q)b$
Tips mencari beda dari 2 suku: $b=\frac{U_p-U_q}{p-q}$
Tips jumlah n suku pertama: $S_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n) \Rightarrow S_n=\frac{n}{2}(U_p+U_q)$ ☺

Cara Biasa: (Barisan dan Deret Aritmetika)

$U_3=8 \Rightarrow a+2b=8$
$U_6=17 \Rightarrow a+5b=17$
$-3b=-9$
$\Leftrightarrow b=3$
$a+2b=8 \Rightarrow a+2(3)=8$
$\Leftrightarrow a+6=8$
$\Leftrightarrow a=2$

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)b)$$
$$\Leftrightarrow S_{21}=\tfrac{21}{2}(2(2)+20(3))$$
$$=\tfrac{21}{2}\cdot(64)$$
$$=21\cdot 32$$
$$=672$$

TRIK SUPERKILAT:

$$b=\frac{U_6-U_3}{6-3}=\frac{17-8}{3}=3$$

$$S_{21}=\tfrac{21}{2}(U_1+U_{21})$$
$$\Leftrightarrow S_{20}=\tfrac{21}{2}(U_6+U_6+10b)$$
$$=\tfrac{21}{2}(17+17+10(3))$$
$$=\tfrac{21}{2}(64)$$
$$=672$$

22. Seutas tali dipotong menjadi 8 bagian. Panjang masing-masing potongan tersebut mengikuti barisan geometri. Potongan tali yang paling pendek 4 cm dan potongan tali yang paling panjang 512 cm. Panjang tali semula adalah ....

A. 508 cm
B. 1.020 cm
C. 1.024 cm
D. 2.032 cm
E. 2.048 cm

LOGIKA PRAKTIS:
Ingat rumus suku ke-n barisan aritmetika adalah: $U_n=a\cdot r^{n-1}$
Ingat juga rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah:
$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}; r>1$
$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}; r<1$ ☺

Cara Biasa: (Barisan dan Deret Geometri)

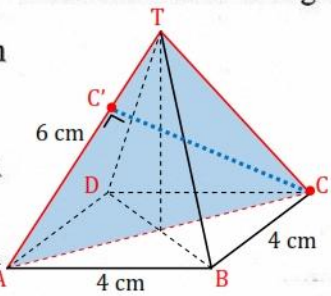
Dari soal diperoleh:
$n=8; U_1=a=4$ cm; $U_n=U_8=512$ cm
$U_1=4 \Rightarrow a=4$
$U_8=512 \Rightarrow a\cdot r^7=512$
$\Leftrightarrow 4r^7=512$
$\Leftrightarrow r^7=128$
$\Leftrightarrow r=2$

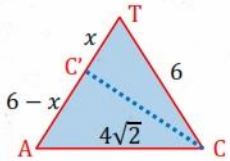
$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \Rightarrow S_8=\frac{4(2^8-1)}{2-1}$$
$$=4(256-1)$$
$$=4(255)$$
$$=1.020$$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

23. Diketahui limas beraturan T.ABCD dengan ABCD adalah persegi yang memiliki panjang AB = 4 cm dan TA = 6 cm. Jarak titik C ke garis AT = ...

A. $\frac{1}{4}\sqrt{14}$ cm
B. $\frac{2}{3}\sqrt{14}$ cm
C. $\frac{3}{4}\sqrt{14}$ cm
D. $\frac{4}{3}\sqrt{14}$ cm
E. $\frac{3}{2}\sqrt{14}$ cm





Cara Biasa: (Dimensi Tiga (Jarak))

Jarak titik C ke garis AT adalah CC'.
AC diagonal bidang ABCD, $AC = 4\sqrt{2}$ cm
Perhatikan ΔACT, panjang ruas garis CC' dapat ditentukan aturan Pythagoras:

$CC' = \sqrt{TC^2 - TC'^2}$

Namun kita perlu mencari panjang TC' sebelum mencari panjang CC'.

$$\begin{aligned} CC'^2 &= CC'^2 \\ AC^2 - AC'^2 &= TC^2 - TC'^2 \\ (4\sqrt{2})^2 - (6-x)^2 &= 6^2 - x^2 \\ 32 - (36 - 12x + x^2) &= 36 - x^2 \\ -4 + 12x - x^2 &= 36 - x^2 \\ 12x &= 40 \\ x &= \frac{10}{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

Perhatikan segitiga TCC' maka diperoleh:

$$\begin{aligned} CC' &= \sqrt{TC^2 - TC'^2} \\ &= \sqrt{(6)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{36 - \frac{100}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{224}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{16}\sqrt{14}}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{14} \text{ cm} \end{aligned}$$

LOGIKA PRAKTIS:
Trik menghitung $\sqrt{6^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2}$ dg mudah!
Ubah dulu 6 menjadi $\frac{18}{3}$.
FPB antara $\frac{18}{3}$ dan $\frac{10}{3}$ adalah $\frac{2}{3}$.
Lalu ingat konsep triple Pythagoras "tipe akar"

$\sqrt{(a\sqrt{b})^2 \pm (a\sqrt{c})^2} = a\sqrt{b \pm c}$

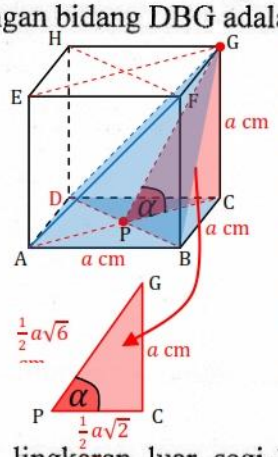
Sehingga,

$$\begin{aligned} \sqrt{6^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2} &= \frac{2}{3}\sqrt{81 - 25} \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{14} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{14} \end{aligned}$$

☺

24. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a cm. Nilai cosinus sudut antara bidang ABCD dengan bidang DBG adalah ....

A. $\sqrt{2}$
B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
D. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
E. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$



Cara Biasa: (Dimensi Tiga (Sudut))

AC diagonal bidang, $AC = a\sqrt{2}$ cm.
C adalah proyeksi G di bidang $ABCD$, $GC \perp ABCD$, jadi ΔGPC siku-siku di C.
$GC = a$ cm,
P titik potong diagonal pada bidang $ABCD$, maka $AP = PC$, sehingga:

$PC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ cm

Perhatikan ΔGPC, panjang PG bisa dicari menggunakan teorema Pythagoras:

$$\begin{aligned} GP &= \sqrt{PC^2 + CG^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + (a)^2} \\ &= \frac{1}{2}a\sqrt{6} \text{ cm} \end{aligned}$$

Sudut antara bidang $ABCD$ dan bidang DBG adalah sudut yang dibentuk oleh garis PC dan PG.
Karena ΔGPC siku-siku di C, maka dengan menggunakan definisi trigonometri "cos sami" akan diperoleh nilai kosinus sudut tersebut, yaitu:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\angle(PC, PG) \\ &= \frac{\text{sisi samping sudut}}{\text{sisi miring}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a\sqrt{6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

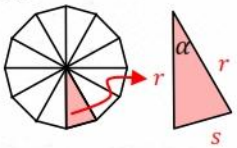
LOGIKA PRAKTIS:
Perhatikan segitiga GPC, karena ΔGPC siku-siku di C, maka dengan menggunakan definisi trigonometri "cos sami" akan diperoleh nilai kosinus sudut tersebut, yaitu:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\angle(PC, PG) \\ &= \frac{\text{sisi samping sudut}}{\text{sisi miring}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{\frac{1}{2}a\sqrt{6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

☺

25. Diketahui jari-jari lingkaran luar segi-12 beraturan adalah r cm. Panjang sisi segi-12 beraturan tersebut adalah ....

A. $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm
B. $2r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm
C. $r\sqrt{1+\sqrt{3}}$ cm
D. $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm
E. $2r\sqrt{1+\sqrt{3}}$ cm



Catatan TRIK SUPERKILAT:
Perhatikan, pada segi-n beraturan terdapat n buah segitiga yg kongruen,
Panjang s bisa dicari menggunakan aturan cosinus:

$s^2 = r^2 + r^2 + 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \Leftrightarrow s = r\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\right)}$

Jadi, panjang sisi segi-n: $s_{segi-n} = r\sqrt{2(1 - \cos\left(\frac{360^\circ}{12}\right)}$

TRIK SUPERKILAT: (Aturan Sinus dan Kosinus)

$$\begin{aligned} s_{segi-12} &= r\sqrt{2(1 - \cos 30^\circ)} \\ &= r\sqrt{2\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)} \\ &= r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

LOGIKA PRAKTIS:
Sisi segi-12 itu sedikiiiiiiiiiit lebih kecil dari keliling lingkaran.
Keliling lingkaran berjari-jari r adalah $2\pi r$, senilai dg $6{,}28r$.
Jadi sisi segi 12 = $6{,}28r : 12$ mendekati $0{,}5r$.
Karena $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, maka hanya $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ yg mendekati $0{,}5r$
(Bukti: $\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx \sqrt{0{,}3} \approx 0{,}5 \ldots$)
Jadi, jelas jawabannya A!

☺

26. Himpunan penyelesaian persamaan $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$ untuk $0^\circ \le x \le 360^\circ$ ....

A. $\{60^\circ, 120^\circ, 270^\circ\}$
B. $\{120^\circ, 240^\circ, 270^\circ\}$
C. $\{90^\circ, 240^\circ, 270^\circ\}$
D. $\{120^\circ, 180^\circ, 240^\circ\}$
E. $\{120^\circ, 150^\circ, 270^\circ\}$

Cara Biasa: (Persamaan Trigonometri)

$$\begin{aligned} & \cos 2x + 3\cos x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2\cos^2 x - 1) + 3\cos x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0 \\ & \text{Pembuat nol} \\ \Leftrightarrow\ & 2\cos x + 1 = 0 \text{ atau } \cos x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos x = -\frac{1}{2} \text{ atau } \cos x = -1 \end{aligned}$$

Jadi, nilai x memenuhi persamaan:

$\cos x = -\frac{1}{2} = -\cos 60^\circ$

- Kuadran II:
  $\cos x = \cos(180^\circ - 60^\circ)$
  $= \cos 120^\circ$
- Kuadran III:
  $\cos x = \cos(180^\circ + 60^\circ)$
  $= \cos 240^\circ$

$\cos x = -1$

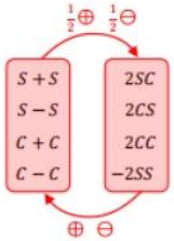
- Kuadran II:
  $\cos x = -1 = \cos 180^\circ$

LOGIKA PRAKTIS:
Dengan mudah kita melihat bahwa pola pengerjaan soal di samping adalah mengubah persamaan soal menjadi persamaan kuadrat dengan $\cos x$ sebagai variabelnya.
Ingat $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

☺

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

LOGIKA PRAKTIS:
Cara mudah mengingat dan menghafal rumus jumlah selisih sinus kosinus adalah:

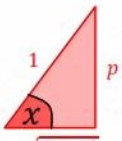


27. Diketahui $\sin(x-60°)+\sin(x+60°)=p$. Hasil dari $\sin 2x = ...$

A. $-2p\sqrt{1-p^2}$
B. $p\sqrt{1-p^2}$
C. $2p\sqrt{1-p^2}$
D. $2p^2-2p$
E. $-2p^2+2p$

Cara Biasa: (Rumus Jumlah Selisih Sinus Kosinus)

$$\sin(x-60°)+\sin(x+60°)=p$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}((x-60°)+(x+60°))\cos\tfrac{1}{2}((x-60°)-(x+60°))=p$$
$$2\sin x\cos(-60)=p$$
$$2\sin x\left(\tfrac{1}{2}\right)=p$$
$$\sin x=p$$



$\sin x = p$ dapat digambarkan pada segitiga di samping, sehingga nilai $\cos x = \sqrt{1-p^2}$

Jadi nilai dari $\sin 2x$ adalah:
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
$= 2p\sqrt{1-p^2}$

☺

28. Nilai dari $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-8x+6}-\sqrt{4x^2+16x-3}\right)=....$

LOGIKA PRAKTIS:
Penyelesaian limit tak hingga berbentuk
$\lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r}$
adalah $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$

A. −6
B. −4
C. 4
D. 6
E. 10

TRIK SUPERKILAT: (Limit Fungsi Aljabar)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-8x+6}-\sqrt{4x^2+16x-3}\right)=\frac{-8-16}{2\sqrt{4}}$$
$$=\frac{-24}{4}$$
$$=-6$$

☺

29. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\dfrac{4\sin^2 2x}{x\tan 2x}=....$

LOGIKA PRAKTIS:
Pada limit trigonometri yg memuat bentuk sinus atau tangen dan menghasilkan bentuk tak tentu 0/0 adalah mencoret sinus dan tangen dan menyisakan sudutnya saja. Lalu mencoret variabel yang sama pada pembilang dan penyebut.

A. −8
B. −4
C. 0
D. 4
E. 8

Cara Biasa: (Limit Fungsi Trigonometri)

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 2x}{x\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin 2x\cdot\sin 2x}{x\cdot\tan 2x}$$
$$=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 2x}$$
$$=4\cdot 2\cdot 1$$
$$=8$$

TRIK SUPERKILAT
Coret sin dan tangen!

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 2x}{x\tan 2x}=\frac{4\cdot(2x)^2}{x\cdot 2x}$$
$$=\frac{16x^2}{2x^2}$$
$$=8$$

☺

30. Dua bilangan bulat m dan n memenuhi hubungan $2m+n=-40$. Nilai minimum dari $p=m^2+n^2$ adalah ..

LOGIKA PRAKTIS:
Nilai optimum fungsi $f(x)$ akan terjadi untuk x yang menyebabkan nilai turunan pertamanya $f'(x)$ sama dengan nol.

A. 405
B. 395
C. 320
D. 260
E. 200

Cara Biasa: (Aplikasi Turunan)

$2m+n=-40 \Rightarrow n=-2m-40$
Substitusikan $n=-2m-40$ ke $p=m^2+n^2$, diperoleh:
$n=-2m-40 \Rightarrow p=m^2+(-2m-40)^2$
$\Leftrightarrow p=m^2+4m^2+160m+1600$
$\Leftrightarrow p=5m^2+160m+1600$
Turunan pertama dari p adalah:
$p=5m^2+160m+1600 \Rightarrow p'=10m+160$

Nilai p akan minimum untuk m yang menyebabkan $p'=0$
$p'=0$
$\Leftrightarrow 10m+160=0$
$\Leftrightarrow 10m=-160$
$\Leftrightarrow m=-16$
Jadi diperoleh juga:
$m=16 \Rightarrow n=-2(-16)-40$
$\Leftrightarrow n=-8$

Jadi nilai minimum dari p adalah:
$p=m^2+n^2$
$=(-16)^2+(-8)^2$
$=256+64$
$=320$

31. Hasil dari $\int_0^2 3(x+1)(x-6)\,dx = ...$

LOGIKA PRAKTIS:
Untuk mengintegral yang pertama harus diperhatikan adalah pangkatnya silahkan ditambah 1, koefisiennya dibagi hasil penjumlahan pangkat dengan 1 tadi!
Untuk integral tertentu, jangan lupa batas atas dulu disubstitusi ke hasil integral!

A. −58
B. −56
C. −28
D. −16
E. −14

Cara Biasa: (Integral Tertentu Fungsi Aljabar)

$$\int_0^2 3(x+1)(x-6)\,dx=\int_0^2(3x^2-15x-18)\,dx$$
$$=\left[x^3-\frac{15}{2}x^2-18x\right]_0^2$$
$$=\left((2)^3-\frac{15}{2}(2)^2-18(2)\right)-\left((0)^3-\frac{15}{2}(0)^2-18(0)\right)$$
$$=\left(8-\frac{60}{2}-36\right)-(0)$$
$$=-58$$

☺

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

32. Nilai $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \ldots.$

A. π
B. $\frac{3\pi}{2}$
C. $\frac{\pi}{2}$
D. $\frac{3\pi}{4}$
E. $\frac{\pi}{4}$

LOGIKA PRAKTIS:
Pengerjaan integral fungsi trigonometri pangkat genap pasti melibatkan identitas trigonometri berikut untuk mengubah bentuk kuadrat dari fungsi trigonometri di soal:

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
  $\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$
- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
  $\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

☺

Cara Biasa: (Integral Tertentu Fungsi Trigonometri)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{4}\sin 2(0)\right)$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin \pi\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\sin 0\right)$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(0)\right) - \left(0 + \frac{1}{4}(0)\right)$$
$$= \left(\frac{\pi}{4} + 0\right) - (0)$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

33. Hasil dari $\int \frac{4x-8}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx = \ldots.$

A. $4\sqrt{x^2-4x+5} + C$
B. $2\sqrt{x^2-4x+5} + C$
C. $\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4x+5} + C$
D. $-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4x+5} + C$
E. $-4\sqrt{x^2-4x+5} + C$

LOGIKA PRAKTIS:
Lihat! Soal di samping ini hanya menguji seberapa kemampuan kita dalam menemukan koefisien fungsi hasil integral.

$$\int (4x-8)(1x^2-4x+5)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$\frac{4}{1\cdot 2}\quad \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 4$$

Selesai!
☺

TRIK SUPERKILAT: (Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar)

$$\int \frac{(4x-8)}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx = \int \cancel{(4x-8)}^{2}(x^2-4x+5)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{d(x^2-4x+5)}{\cancel{2x-4}}\right)$$
$$= 2\int (x^2-4x+5)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2-4x+5)$$
$$= 2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}(x^2-4x+5)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 4(x^2-4x+5)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 4\sqrt{(x^2-4x+5)} + C$$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

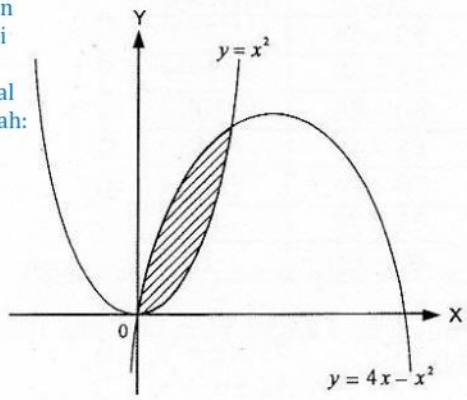
Catatan

34. Luas daerah yang diarsir pada gambar berikut dapat dinyatakan dengan rumus ....

LOGIKA PRAKTIS:
Integral yang menyatakan luas daerah yang dibatasi $f(x)$ dan $g(x)$, dimana $f(x) > g(x)$ pada interval $x = a$ sampai $x = b$ adalah:

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

☺



A. $L = \int_0^2 \{(4x - x^2) - x^2\}dx$

B. $L = \int_0^2 \{(4 - x^2) - x^2\}dx$

C. $L = \int_0^2 \{x^2 - (4x - x^2)\}dx$

D. $L = \int_0^2 \{x^2 + (4x - x^2)\}dx$

E. $L = \int_0^2 \{(x^2 - 4x) + x^2\}dx$

Cara Biasa: (Aplikasi Integral (Luas Daerah))
Mencari titik potong antara dua kurva:

$$\begin{aligned} & y_1 = y_2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 4x - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - (4x - x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 4x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x(x-2) = 0 \end{aligned}$$

Pembuat nol

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2$$

Perhatikan pada daerah interval $0 \le x \le 2$, pada grafik di samping terlihat jelas bahwa $4x - x^2 \ge x^2$.

Jadi, integral yang menyatakan luas daerah yang diarsir adalah:

$$L = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$
$$= \int_{-2}^3 \big((4x - x^2) - x^2\big)\,dx$$

35. Volume benda putar dari daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 3x$ dan $y = x^2$ yang diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° adalah ...

LOGIKA PRAKTIS:
Volume benda putar dari daerah yang dibatasi oleh y_1 dan y_2, dimana $y_1 > y_2$ pada $x = a$ sampai $x = b$ jika diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° adalah:

$$V = \pi \int_a^b y_1^2 - y_2^2\ dx$$

☺

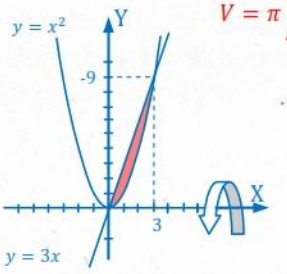
A. $\frac{62}{5}\pi$ satuan volume

B. $\frac{63}{3}\pi$ satuan volume

C. $\frac{162}{5}\pi$ satuan volume

D. $\frac{98}{3}\pi$ satuan volume

E. $\frac{262}{5}\pi$ satuan volume



Cara Biasa: (Aplikasi Integral (Volume Benda Putar))

$$V = \pi \int_a^b y_1^2 - y_2^2\ dx = \pi \int_0^3 (3x)^2 - (x^2)^2\ dx$$
$$= \pi \int_0^3 (9x^2 - x^4)\ dx$$
$$= \pi \left[3x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^3$$
$$= \pi \left[\left(3(3)^3 - \frac{1}{5}(3)^5\right) - \left(\frac{4}{3}(0)^3 - \frac{1}{5}(0)^5\right)\right]$$
$$= \pi \left(81 - \frac{243}{5}\right)$$
$$= \pi \left(\frac{405 - 243}{5}\right)$$
$$= \frac{162}{5}\pi \text{ satuan volume}$$

Mencari titik potong antara dua kurva:

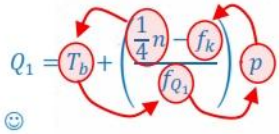
$$\begin{aligned} & y_1 = y_2 \\ \Leftrightarrow\ & 3x = x^2 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 + 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x-3) = 0 \end{aligned}$$

Pembuat nol

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 3$$

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

Catatan LOGIKA PRAKTIS:
Urutan variabel yang harus dicari perhatikan diagram alur berikut:



☺

36. Kuartil bawah pada data tabel berikut ini adalah ....

A. 59,5
B. 60,7
C. 62,5
D. 63,0
E. 64,5

Upah harian (Rp)	Banyak karyawan	Frekuensi kumulatif ≤
50 – 54	3	3
55 – 59	5	8
60 – 64	10	18
65 – 69	16	34
70 – 74	14	48
75 – 79	8	56
80 – 84	4	60
Jumlah	60	

Cara Biasa: (Statistika (Ukuran Letak))
Kuartil bawah artinya Q_1. Jumlah data $n = 60$, diperoleh $\frac{1}{4}n = 15$. Q_1 terletak pada data ke-15, yaitu di kelas ke-3. Jadi, letak kelas Q_1 pada kelas interval $60 - 64$ yang memiliki **nilai tepi bawah kelas Q_1 adalah 59,5**, panjang kelas interval 5, dan **frekuensi Q_1 adalah 10**. Frekuensi kumulatif kurang dari 59,5 adalah 8.

$$Q_1 = T_b + \left(\frac{\frac{1}{4}n - f_k}{f_{Q_1}}\right) \cdot p = 59{,}5 + \left(\frac{15 - 8}{10}\right) \cdot 5$$
$$= 59{,}5 + 3{,}5 = 63{,}0$$

LOGIKA PRAKTIS:
Perhatikan syarat bilangan yang disusun:
- Harus lebih dari 400
- Harus berbeda (tidak boleh ada angka yang berulang)

☺

37. Dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 akan disusun bilangan 3 angka yang berbeda. Banyak bilangan lebih besar dari 400 yang dapat disusun adalah ....

A. 48
B. 60
C. 72
D. 108
E. 120

Cara Biasa: (Kaidah Pencacahan (Aturan Pengisian Tempat))
Banyak bilangan yang terdiri tiga angka berbeda lebih dari 400:
- Angka ratusan : ada 3 cara, yaitu diisi dengan angka 4, 5, 6. Misal kita pilih angka 4 sebagai angka ratusan.
- Angka puluhan : ada 5 cara, yaitu diisi dengan angka 1, 2, 3, 5, 6. Misal kita pilih angka 1 sebagai angka puluhan.
- Angka satuan : ada 4 cara, yaitu diisi dengan angka 2, 3, 5, 6.

Angka ratusan	Angka puluhan	Angka satuan	Banyak bilangan
3	5	4	$3 \times 5 \times 4 = 60$ bilangan

LOGIKA PRAKTIS:
Untuk mempermudah perhitungan. Ingatlah!
Permutasi n unsur dari r unsur itu perkalian r angka terakhir dari n
${}_3P_3$ = perkalian 3 angka terakhir dari 3
$= 3 \cdot 2 \cdot 1$
$= 6$

☺

38. Dua keluarga yang masing-masing terdiri dari 2 orang dan 3 orang ingin foto bersama. Banyak posisi foto yang berbeda dengan anggota keluarga yang sama selalu berdampingan adalah ....

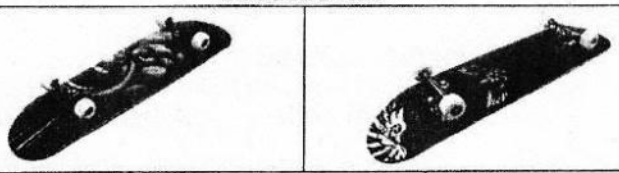
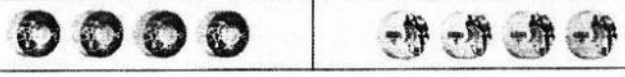
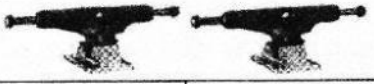
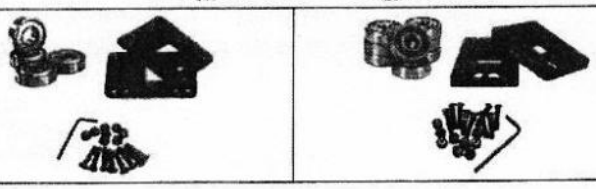
A. 24
B. 36
C. 48
D. 72
E. 96

Cara Biasa: (Permutasi)
Ada 2 keluarga duduk bersama, artinya kita akan mengacak 2 kelompok secara berbeda (permutasi), yaitu keluarga pertama dan keluarga kedua. Sementara setiap anggota keluarga yang sama harus berdampingan, berarti
- 2 orang keluarga pertama sebenarnya kita akan mengacak posisi duduk secara berbeda (permutasi) hanya 2 orang saja.
- 3 orang keluarga kedua sebenarnya kita akan mengacak posisi duduk secara berbeda (permutasi) hanya 3 orang saja.

Jadi,
n = posisi dua keluarga × posisi keluarga pertama × posisi keluarga kedua
$= {}_2P_2 \cdot {}_2P_2 \cdot {}_3P_3$
$= \frac{2!}{(2-2)!} \cdot \frac{2!}{(2-2)!} \cdot \frac{3!}{(3-3)!}$
$= 2! \cdot 2! \cdot 3!$
$= (2 \times 1) \cdot (2 \times 1) \cdot (3 \times 2 \times 1)$
$= 2 \cdot 2 \cdot 6$
$= 24$ kemungkinan

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

39. Erik suka sekali main skateboard. Dia mengunjungi sebuah toko bersama SKATERS untuk mengetahui beberapa model.
Di toko ini dia dapat membeli skateboard yang lengkap. Atau, ia juga dapat membeli sebuah papan, satu set roda yang terdiri dari 4 roda, satu set sumbu yang terdiri dari dua sumbu, dan satu set perlengkapan kecil untuk dapat merakit skateboard sendiri.
Daftar barang dan model/jenis skateboard di toko ini sebagai berikut:

Barang	Model/Jenis
Skateboard lengkap	
Papan	
Dua set roda yang terdiri dari 4 roda	
Satu set sumbu yang terdiri dari dua sumbu	
Dua set perlengkapan kecil (seperti baut, mur, dan karet)	

Toko itu menawarkan tiga macam papan, dua macam set roda, dan dua macam set perlengkapan kecil. Hanya ada satu macam set sumbu.
Berapa banyak skateboard berbeda yang dapat dibuat oleh Erik?

A. 6
B. 8
C. 10
D. 12
E. 24

LOGIKA PRAKTIS:
Kita perlu memahami makna dari kalimat berikut:
"Skateboard yg dapat dibuat oleh Erik"
Artinya adalah berapa banyak skateboard yang bisa dibuat dengan menyusun bagian-bagian dari skateboard tersebut.
Perhatikan, Erik bisa membeli:
- 3 papan
- 2 set roda
- 1 set sumbu
- 2 set perlengkapan kecil.

Gunakan aturan perkalian untuk menyelesaikan soal ini!
☺

Cara Biasa: (Kaidah Pencacahan (Aturan Perkalian))
Banyaknya kemungkinan skateboard berbeda yang dapat dibuat oleh Erik adalah hasil perkalian antara banyaknya papan, banyaknya set roda, banyaknya set sumbu, dan banyaknya set perlengkapan kecil, yaitu:

$n = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ kemungkinan

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD

40. Sebuah film dokumenter menayangkan perihal gempa bumi dan seberapa sering gempa bumi terjadi. Film itu mencangkup diskusi tentang keterkiraan gempa bumi. Seorang ahli geologi menyatakan: "Dalam dua puluh tahun ke depan, peluang bahwa sebuah gempa bumi akan terjadi di kota Zadia adalah dua per tiga."
Manakah di bawah ini yang paling mencerminkan maksud pernyataan ahli geologi tersebut?

A. $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$, sehingga antara 13 dan 14 tahun dari sekarang akan terjadi sebuah gempa bumi di kota Zadia.

B. $\frac{2}{3}$ lebih besar dari pada $\frac{1}{2}$, sehingga kita dapat meyakini bahwa akan terjadi sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan.

C. Peluang terjadinya sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan lebih tinggi dari pada peluang tidak terjadinya gempa bumi.

D. Kita tak dapat mengatakan apa yang akan terjadi, karena tidak seorang pun dapat meyakinkan kapan sebuah gempa bumi akan terjadi.

E. Pasti akan terjadi gempa bumi 20 tahun yang akan datang, karena sudah diperkirakan oleh ahli geologi.

LOGIKA PRAKTIS:
Jawaban A, ya nggak gitu juga kali!
Dua pertiga itu peluang terjadinya gempa bumi, bukan masalah kapan terjadinya. Tapi TERJADI atau TIDAK nya gempa bumi!!!

Jawaban B, ya nggak gitu juga kali! Kita yakin akan terjadi itu kalau nilai peluangnya sama dengan 1. Dan tidak mungkin akan terjadi jika peluangnya sama dengan 0.
- $P(A) = 1$ artinya PASTI
- $P(A) = 0$ artinya MUSTAHIL
- $0 < P(A) < 1$ artinya BISA JADI!! BISA JADI!! BISA JADI!!! YAA!! YAA!!! TIDAK!! TIDAK!!

Jawaban C ini yang benar.... karena $P(A) > P(A^C)$, maka peluang terjadinya gempa lebih besar dari peluang tidak terjadinya gempa.

Jawaban D bisa dibilang benar juga sih... Tapi jawaban ini lahir bukan dari pernyataan, tapi dari kepercayaan kita akan suatu hal gaib. Hehehe... Melenceng dari maksud soal. Ditanya apa, jawabnya apa....!

Jawaban E lebay banget deh! Suatu hal pasti terjadi itu jika nilai peluangnya sama dengan 1. Jawaban E salah!

☺

Cara Biasa: (Peluang Kejadian)
Peluang kejadian gempa bumi di kota Zadia adalah dua per tiga.
Misal A = kejadian gempa bumi di kota Zadia 20 tahun ke depan, berarti:
$P(A) = \frac{2}{3}$
Sehingga misal A^C = kejadian tidak terjadi gempa bumi di kota Zadia 20 tahun ke depan, maka peluang tidak terjadinya gempa bumi di kota Zadia adalah:
$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Jadi karena $P(A) > P(A^C)$, maka peluang terjadinya gempa bumi di kota Zadia 20 tahun ke depan lebih besar daripada peluang tidak terjadinya gempa bumi.

Pembahasan Soal UN Matematika SMA 2013 Paket 4 ini ditulis oleh Pak Anang.
Silahkan kunjungi http://pak-anang.blogspot.com untuk pembahasan soal UN 2013 yang lain.

©Hak Cipta pada Pusat Penilaian Pendidikan-BALITBANG-KEMDIKBUD